



Fundamentos de homotopía

Sesión 1

Universidad de El Salvador
Escuela de Matemática

14 de diciembre 2020

Contenidos

- 1 Preliminares
- 2 Homotopía de funciones
- 3 Espacio de funciones
- 4 El grupo fundamental
- 5 H – espacios
- 6 Espacio Lazo
- 7 Suspensión reducida

- Sea X un espacio topológico, en general suponemos que un punto fijo ha sido elegido al que llamaremos punto base de X . Se denota, x_0 , $*_X$ o $*$. El espacio X es llamado espacio con punto base o **espacio punteado** y se denota por (X, x_0) .
- Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ que lleva el punto base de X al punto base de Y son llamadas funciones base o **aplicaciones punteadas**.
- El producto de dos espacios punteados (X, x_0) y (Y, y_0) es su producto cartesiano $X \times Y$ con la topología producto y punto base (x_0, y_0) .

- 1 Sean X y Y espacios con subespacios $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. Los pares (X, A) y (Y, B) son llamados **pares de espacios**.
- 2 Una **función de pares de espacios** $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ es una función $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Homotopía

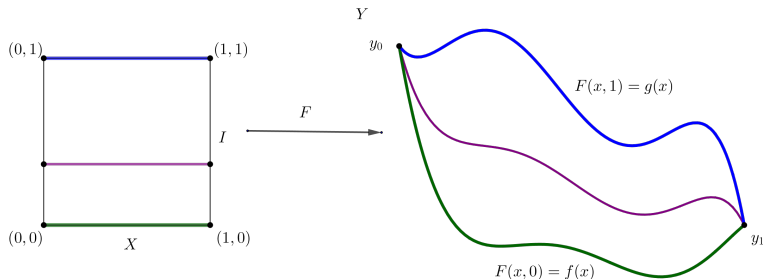
Sean $f, g : X \rightarrow Y$ funciones e $I = [0, 1] = \{t | t \in, 0 \leq t \leq 1\}$. Diremos que f es homotópica a g , escribiremos $f \simeq g$, si existe una función continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que:

$$F(x, 0) = f(x)$$

$$F(x, 1) = g(x)$$

$$F(x_0, t) = y_0$$

A continuación la ilustración de la definición tomando como $X = I$

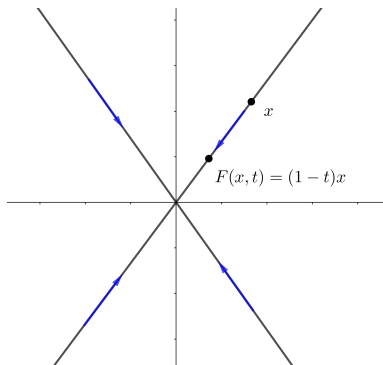


Ejemplo

Ejemplo

Sea $X = Y = \mathbb{R}^n$. Las funciones $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas por $f(x) = x$ y $g(x) = 0$ son homotópicas.

En efecto, definiendo $F : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(x, t) = (1 - t)x$, se tiene que F es continua y además $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, por tanto $f \simeq g$.



Proposición

Para cualesquiera espacios X y Y , homotopía es una relación de equivalencia sobre el conjunto de todas las funciones de X a Y . Además, si $f \simeq g : X \rightarrow Y$, $k : A \rightarrow X$ y $l : Y \rightarrow B$ son funciones, entonces $f \circ k \simeq g \circ k$ y $l \circ f \simeq l \circ g$.

Reflexiva: Si $f : X \rightarrow Y$ una función continua, entonces $f \simeq f$.

Definimos la homotopía:

$$F : X \times I \rightarrow Y, F(x, t) = f(x).$$

Se tiene que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = f(x)$ y $F(x, t)$ es continua.

Simétrica: Sea $f, g : X \rightarrow Y$. Si $f \simeq g$ entonces $g \simeq f$.

Si $f \simeq g$, existe $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, entonces podemos definir

$$G : X \times I \rightarrow Y, G(x, t) = F(x, 1 - t)$$

se tienen que G es continua y $G(x, 0) = g(x)$ y $G(x, 1) = f(x)$.

Transitiva: Sean $f, g, h : X \rightarrow Y$. Si $f \simeq g$ y $g \simeq h$ entonces $f \simeq h$. Como $f \simeq g$ existe $F : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$. De manera similar como $g \simeq h$ existe $G : X \times I \rightarrow Y$ continua tal que $G(x, 0) = g(x)$ y $G(x, 1) = h(x)$. Definimos la función $H : X \times I \rightarrow Y$ por

$$H(x, t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t - 1) & \text{if } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

H es continua, por el lema del pegado, y cumple además que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = h(x)$.

Definición

Para una función $f : X \rightarrow Y$, denotaremos por $[f]$ la clase de equivalencia conteniendo a f y es llamada la clase de homotopía de f . La colección de todas las clases de homotopía de funciones de $X \rightarrow Y$ es denotada por $[X, Y]$ y es llamado conjunto de homotopía.

Definición

Si $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son aplicaciones de pares, f es homotópica a g (denotada por $f \simeq g$) si existe una **homotopía de pares** $H : (X, A) \times I \rightarrow (Y, B)$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$.

De manera similar, la homotopía de pares es una relación de equivalencia. Las clases de equivalencias las denotaremos por $[X, A; Y, B]$.

Definición

Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada una equivalencia homotópica si existe una función $g : Y \rightarrow X$ tal que es una inversa homotópica derecha e izquierda de f , es decir, $f \circ g \simeq id_Y$ y $g \circ f \simeq id_X$

Definición

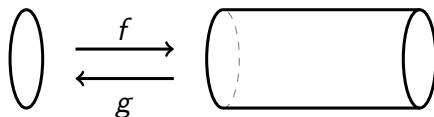
Dos espacios X y Y tienen el mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica de uno sobre el otro. Lo denotaremos por $X \simeq Y$

Proposición

La relación $X \simeq Y$ es una relación de equivalencia sobre espacios topológicos.

Ejemplo

Sea $X = \mathbb{S}^1$ y $Y = [0, 1] \times \mathbb{S}^1$, la 1-esfera y el cilindro como subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Mostraremos que X y Y tienen el mismo tipo de homotopía.



Definimos $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = (0, x)$ y $g : Y \rightarrow X$, $g(r, x) = x$. Es claro que f y g son funciones continuas. Debemos probar que las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son homotópicas a Id_X y Id_Y respectivamente.

- $(g \circ f)(x) = x$, $g \circ f \simeq Id_X$.
- $(f \circ g)(r, x) = (0, x)$, definimos la homotopía

$$F : Y \times I \rightarrow Y, F((r, x), t) = (rt, x)$$

Se tiene que en efecto que

$$F((r, x), 0) = (0, x) = (f \circ g)(r, x),$$

$$F((r, x), 1) = (r, x) = Id_Y$$

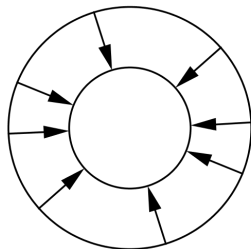
y además F es continua. Así $g \circ f \simeq Id_Y$

Definiciones :

- 1 Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada nulo homotópica si $f \simeq *$ donde $* : X \rightarrow Y$ es la función constante.
- 2 Una homotopía entre f y $*$ es llamada homotopía nula.
- 3 Un espacio X es contraíble si id_X es nulo homotópica y la homotopía nula es llamada homotopía contraíble.

- 1 Sea X un espacio y A un subespacio (conteniendo al punto base de X). Una función $r : X \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$ es llamada una retracción de X sobre A y A es llamado un retracts de X .
- 2 Si $\iota : A \rightarrow X$ es la función inclusión, entonces $r \circ \iota = id_A$. Además si $\iota \circ r \simeq id_X$ llamaremos a r una retracción por deformación y A un retracto por deformación de X

Ejemplo: Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\}$ y $\mathbb{S}^1$ como subespacio de X . Buscaremos una reetracción de X sobre $\mathbb{S}^1$.



Definimos $r : X \rightarrow \mathbb{S}^1$,
 $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, r así definida
cumple ser continua y
además deja fijo a los puntos
de $\mathbb{S}^1$. Por tanto r es una
reetracción.

Veremos ahora que $r : X \rightarrow \mathbb{S}^1$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$ es un retractor por deformación. Sea $\iota : \mathbb{S}^1 \rightarrow X$, $x \mapsto x$. Verificaremos que $\iota \circ r \simeq id_X$. Definimos la homotopía:

$$F : X \times I \rightarrow X, ((x, y), t) \mapsto (1 - t) \frac{(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + t(x, y).$$

Se tiene que $F((x, y), 0) = \frac{x}{\|x\|} = (\iota \circ r)$ y $F((x, y), 1) = (x, y)$.

Observación: Si $r : X \rightarrow A$ es un retracts por deformación, entonces X y el subespacio A tienen el mismo tipo de homotopía. $r \circ \iota = id_A$ y $\iota \circ r \simeq id_X$.

Definición

Sea X, Y conjuntos. Denotamos por Y^X el conjunto de funciones $f : X \rightarrow Y$.

Supongamos que X y Y son espacios topológicos, consideremos el subconjunto $M(X, Y)$ de Y^X de todas las funciones continuas.

Definición

La topología compacto - abierta en $M(X, Y)$ tiene como subbase la familia de conjuntos:

$$U^K = \{f \in M(X, Y) / f(K) \subset U\},$$

donde $K \subset X$ es compacto y U es un abierto en Y .

Denotamos por $M_{co}(X, Y)$ a la topología compacto abierta en $M(X, Y)$.

Proposición

Si X, Y, Z son conjuntos la ley exponencial establece una equivalencia entre los conjuntos:

$$Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$$

Desglosando:

$$Z^{X \times Y} = \{f : X \times Y \rightarrow Z\}$$

$$\begin{aligned}(Z^Y)^X &= \{g : X \rightarrow Z^Y\} \\ &= \{g : X \rightarrow \{f : Y \rightarrow Z\}\}\end{aligned}$$

Definiendo $\varphi : Z^{X \times Y} \rightarrow (Z^Y)^X$, $f \mapsto (\varphi(f) : X \rightarrow Z^Y)$,
donde $\varphi(f)(x)(y) = f(x, y)$.

Y su inversa $\psi : (Z^Y)^X \rightarrow Z^{X \times Y}$,
 $g \mapsto (\psi(g) : X \times Y \rightarrow Z)$, donde $\psi(g)(x, y) = g(x)(y)$.

Proposición

Sean X, Y, Z con Y Hausdorff y localmente compacto. Entonces:

$$\varphi : M(X \times Y, Z) \rightarrow M(X, M(Y, Z))$$

es un homeomorfismo.

Esquema de la demostración: Se debe probar que

$$\varphi : M(X \times Y, Z) \rightarrow M(X, M(Y, Z))$$

$$\psi : M(X, M(Y, Z)) \rightarrow M(X \times Y, Z)$$

están bien definidas y son continuas.

Definición

Sea A un subespacio de X y B un subespacio de Y . Denotamos por $M(X, A; Y, B)$ al subespacio:

$$M(X, A; Y, B) = \{f : X \rightarrow Y / f(A) \subset B\}$$

Definición

Sea X un espacio. Sobre él definimos la relación $x \simeq y$ en X si existe $\alpha \in M(I, X)$ tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Diremos que x está conectado con y por el camino α .

Definición

El espacio X es conexo por caminos o 0 –conexo si $x \simeq y$ para todo $x, y \in X$.

Ejercicio: Probar que $\simeq$ es una relación de equivalencia en X

Definición

Las clases de equivalencias, denotadas por $[x]$, dividen a X en subconjuntos disjuntos llamados componentes por caminos de X . Denotaremos por $\pi_0(X)$ al conjunto de clases de equivalencias.

Proposición

Si el espacio X es Hausdorff y localmente compacto y el espacio Y es Hausdorff entonces:

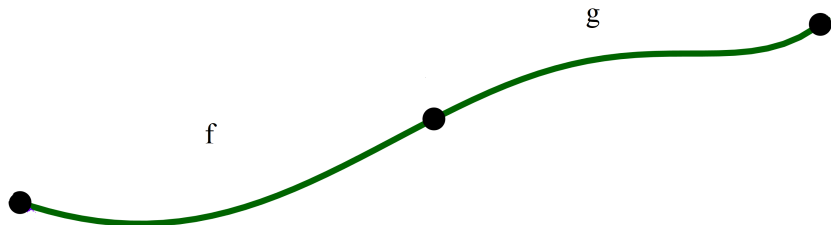
$$[X, Y] = \pi_0(M(X, Y))$$

El grupo fundamental

Para dos espacios X y Y hemos definido el conjunto $[X, Y]$, estudiaremos el caso particular $X = I = [0, 1]$.

Sea X un espacio y $f, g \in M(I, X)$ dos caminos en X tales que $f(1) = g(0)$, el punto final del camino f coincide con el punto inicial del camino g , el producto $f \cdot g$ se define por:

$$(f \cdot g)(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$



Podemos inducir esta definición a las clases de homotopía

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$$

La operación está bien definida ya que se tiene:

Ejercicio

Si $f \simeq f_1$ y $g \simeq g_1$ entonces $f \cdot g \simeq f_1 \cdot g_1$

Veamos las condiciones para que se cumplan los axiomas de grupo:

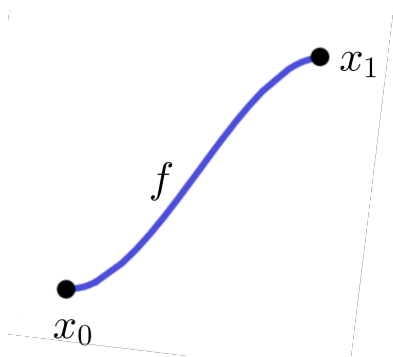
- **Identidad:** Si $c \in X$ se define $e_c : I \rightarrow X, t \mapsto c$. Si f es un camino de x_0 a x_1 se tiene que:

$$[e_{x_0}] \cdot [f] = [f]$$

$$[f] \cdot [e_{x_1}] = [f]$$

- **Inverso:** Si f es un camino de x_0 a x_1 su inverso se define por $\bar{f} : I \rightarrow X, t \mapsto f(1 - t)$.
- **Asociatividad:** Sean f, g, h caminos en X . Si $[f] \cdot ([g] \cdot [h])$ está definido,

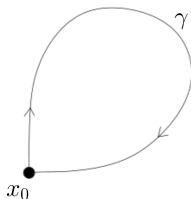
también $([f] \cdot [g]) \cdot [h]$ lo está y son iguales.



Grupo fundamental

Definición

Sea (X, x_0) es un espacio. Un lazo basado en el punto x_0 es una función $\gamma \in M(I, X)$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.



Proposición

El conjunto $\pi_1(X, x_0) := \{[\gamma] \mid \gamma \text{ es un lazo basado en } x_0\}$ es un grupo con la operación $\cdot$ y es llamado el grupo fundamental de X

Propiedades

- Sean (X, x_0) y (Y, y_0) espacios. Una función base $f : X \rightarrow Y$ induce un homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $[\gamma] \mapsto [f \circ \gamma]$.
- Si (X, x_0) y (Y, y_0) tienen el mismo tipo de homotopía, entonces los grupos $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$ son isomorfos.
- Si X es un espacio conexo por caminos entonces $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(X, x_1)$ son isomorfos para cualquier $x_0, x_1 \in X$.
- Si X y Y son espacios conexos por caminos entonces $\pi_1(X \times Y)$ es isomorfo a $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$.
- Si X es un espacio contraíble entonces $\pi_1(X)$ es trivial.

Ejemplos

- $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$.
- $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$ para $n \geq 2$

Un **H-grupo** consiste de un espacio X y dos aplicaciones $m : X \times X \rightarrow X$ e $\iota : X \rightarrow X$ tal que

1. $m \circ j_1 \simeq id \simeq m \circ j_2 : X \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_1} & X \times X \\ & \searrow id & \downarrow m \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j_2} & X \times X \\ & \searrow id & \downarrow m \\ & & X \end{array}$$

donde $j_1, j_2 : X \rightarrow X \times X$ son las inclusiones $j_1(x) = (x, x_0)$ y $j_2(x) = (x_0, x)$.

Esta propiedad nos indica que hay un **elemento identidad** por la derecha e izquierda en el sentido homotópico.

2. $m \circ (m \times id) \simeq m \circ (id \times m) : X \times X \times X \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} X \times X \times X & \xrightarrow{m \times id} & X \times X \\ \downarrow id \times m & & \downarrow m \\ X \times X & \xrightarrow{m} & X \end{array}$$

Lo anterior nos indica que se cumple la **propiedad asociativa** de forma homotópica.

3. $m(id, \iota) \simeq c_{x_0} \simeq m(\iota, id) : X \rightarrow X$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(id, \iota)} & X \times X \\ & \searrow c_{x_0} & \downarrow m \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{(\iota, id)} & X \times X \\ & \searrow c_{x_0} & \downarrow m \\ & & X \end{array}$$

Finalmente, esta propiedad nos indica que existe **inverso** .
NOTACIÓN: (X, m) .

Observación

Si (X, m) satisface únicamente la propiedad 1, esto es, solo hay existencia de identidad homotópica por la izquierda y por la derecha, diremos que (X, m) es un H -espacio.

Si (Y, m) es un H -espacio y X un espacio cualquiera, entonces el conjunto $[X, Y]$ puede dotarse de una operación binaria "suma" de la siguiente manera:

Sean $f, g : X \rightarrow Y$, definimos $f + g : m(f \times g)\Delta = m(f, g)$

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \xrightarrow{m} Y.$$

donde Δ es la aplicación diagonal. Entonces si $\alpha = [f]$ y $\beta = [g]$, tenemos el conjunto $\alpha + \beta = [f + g]$.

Definición

Para un espacio X , el espacio lazo ΩX es el subespacio de X^I que consiste de todos los caminos γ en X tales que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$.

Observaciones:

- 1 Los elementos de ΩX son llamados lazos en X .
- 2 El espacio ΩX tiene la topología compacta abierta como subespacio de X' .
- 3 Si $g : X \rightarrow X'$ es una función, entonces se tiene la función inducida $\Omega g : \Omega X \rightarrow \Omega X'$ definida por $\Omega g(\gamma) = g \circ \gamma$.
- 4 Si $g \simeq_F g' : X \rightarrow X'$, entonces $\Omega g \simeq_G \Omega g' : \Omega X \rightarrow \Omega X'$, donde $G : \Omega X \times I \rightarrow \Omega X'$, $G(\gamma, t)(x) = F(x, t) \circ \gamma$.

Sea $m : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$ definida por:

$$m(\gamma, \gamma')(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \gamma'(2t - 1), & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

E $\iota : \Omega X \rightarrow \Omega X$, definida por $\iota(\gamma)(t) = \gamma(1 - t)$, para todo $\gamma \in \Omega X$ y para todo $t \in I$.

Ejercicio

Probar que $(\Omega X, m)$ es un H -grupo

Definición

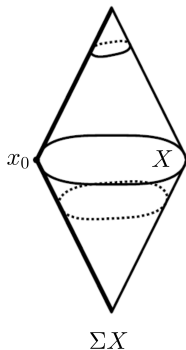
*El espacio lazo $\Omega^n X$ se define de forma inductiva como:
 $\Omega^n X = \Omega(\Omega^{n-1} X)$ para $n \geq 1$ y $\Omega^0 X = X$.*

Suspensión reducida

Definición

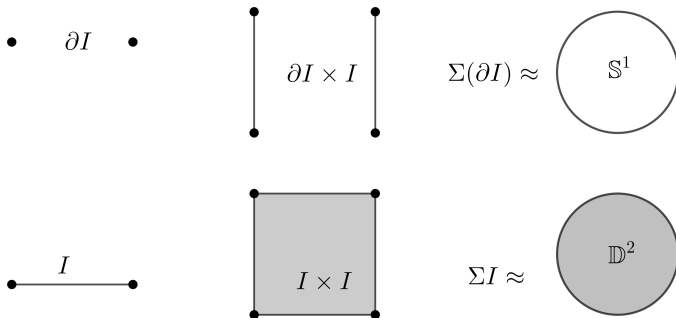
Sea X un espacio punteado. Se define su suspensión reducida ΣX como el cociente

$$\Sigma X = X \times I / X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I.$$



Suspension reducida

Ejemplos:



Ejemplo

- a. $\Sigma(X \vee Y) = \Sigma X \vee \Sigma Y$.
- b. Para $n \geq 1$ la suspensión reducida de la $(n - 1)$ -esfera es la n -esfera, es decir, $\Sigma \mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^n$.

Definición

Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua que preserva el punto base, se define $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ por $\Sigma f([x, t]) = [f(x), t]$.

Es de notar que si $f \simeq g : X \rightarrow Y$, entonces $\Sigma f \simeq \Sigma g : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$. En efecto, si $F : X \times I \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g podemos definir la homotopía $H : \Sigma X \times I \rightarrow \Sigma Y$, $H([x, t], s) = [F(x, s), t]$.

Proposición

Si X y Y son espacios, entonces $[\Sigma X, Y]$ y $[X, \Omega Y]$ son grupos.