

Operadores pseudodiferenciales y procesos de Markov sobre los números p -ádicos

Samuel Estala Arias

División de Posgrado, Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro,
Cerro de las Campanas S/N, Las Campanas,
76010 Santiago de Querétaro, Qro., México
e-mail: samuel.estala@uaq.mx

Marzo 2019

Resumen

En estas notas presentamos una introducción a la teoría de operadores pseudodiferenciales y procesos de Markov en los números p -ádicos. Primero describiremos el proceso de Wiener, proceso de Markov por excelencia en la recta real. El proceso de Markov asociado al operador de Vladimirov en el campo de los números p -ádicos se presenta en analogía con el proceso de Wiener.

Introducción

La teoría de operadores pseudodiferenciales y procesos de Markov es un área muy interesante entre el análisis y la teoría de la probabilidad. Como motivación, consideremos el siguiente resultado: si tenemos una matriz cuadrada real A de tal manera que la suma de los elementos de cada renglón es cero, entonces el semigrupo $S(t) = e^{tA}$ define, de manera esencialmente única, un proceso de Markov X_t con espacio de estados finito, i.e., la suma de los elementos de cada renglón de $S(t)$ es idénticamente uno y además X_t satisface la propiedad markoviana $\mathbb{P}(X_t | X_{s_i}) = \mathbb{P}(X_t | X_{\max s_i})$, ya que $S(t)$ satisface las ecuaciones de Chapman-Kolmogórov $S(t+s) = S(t)S(s)$.

Por otro lado, observemos que el semigrupo $S(t)$ está unívocamente determinado por A , ya que se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dS(t)}{dt} - AS(t) = 0, S(0) = I,$$

por lo que $A = dS(0)/dt$.

En general, si consideramos una matriz cuadrada, el semigrupo $S(t) = e^{tA}$ no define un proceso markoviano. Un criterio muy sencillo para verificar si el proceso es markoviano consiste en considerar la transformada de Fourier discreta en el espacio de estados y utilizarla para cambiar las coordenadas del semigrupo, si obtenemos la función característica de medidas de probabilidad cuyas probabilidades de transición son de Markov, entonces $S(t)$ es de Markov.

Para espacios vectoriales topológicos como los espacios de Banach o Hilbert, la teoría de la exponencial se extiende y un resultado muy importante es el teorema de Hille–Yosida, que en particular implica que la exponencial e^{tD} de un operador D positivo y autoadjunto está bien definida y es un semigrupo fuerte de contracciones i.e., $\|e^{tD}\| \leq 1$. De nuevo, estaremos interesados en que e^{tD} represente un semigrupo markoviano: e^{tD} es un semigrupo de convolución con medidas de probabilidad asociadas a un proceso de Markov en algún espacio métrico completo y segundo numerable.

En el caso continuo, el proceso markoviano más importante y conocido sobre los números reales es el *proceso de Wiener* $B(t) = e^{t\frac{d^2}{dx^2}}$, donde $\frac{d^2}{dx^2}$ es el operador de Laplace en la recta real definido en $L^2(\mathbb{R})$. Este proceso es un modelo probabilista del *movimiento browniano* (el movimiento de partículas suspendidas en algún material líquido) por lo que también se puede describir mediante el límite de caminatas aleatorias. Naturalmente está relacionado la ecuación del calor en la recta real y con la difusión del calor.

La extensión de esta teoría los números p -ádicos ha sido considerada con mucha atención en las últimas tres décadas. Una de sus motivaciones ha sido la construcción de modelos para los fenómenos cuánticos de la física.

Para esto consideraremos el *operador de Vladimirov* de los números p -ádicos, con el cual es posible definir una ecuación del calor homogénea en \mathbb{Q}_p .

Nuestra exposición se encuentra organizada de la siguiente manera. En la Sección 1 describiremos el proceso de Wiener como límite de una caminata aleatoria simple, y presentaremos su relación con la

ecuación del calor en la recta real. En la Sección 2 presentaremos el operador de Vladimirov y el proceso de Markov que define sobre los números p -ádicos.

1. El proceso de Wiener

En esta sección presentamos un resumen de los resultados sobre el proceso de Wiener que nos ejemplifica con claridad lo que buscamos en sus versiones más generales. Como en el caso del cálculo diferencial e integral es posible construir el proceso de Wiener por aproximaciones discretas.

Para comenzar, consideremos una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ con $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 1/2$. Luego, cada X_i tiene esperanza cero y varianza uno. Consideremos una caminata aleatoria simple:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n, \quad (n \geq 1).$$

Observemos que, como la esperanza es lineal y las variables son independientes, el valor esperado y la varianza de S_n satisfacen:

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 0 \quad \text{Var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n.$$

Más aún los saltos de S_n son estacionarios e independientes, esto es, $S_n - S_m$ tiene la misma distribución que S_{n-m} y $S_n - S_m$ es independiente de $S_m - S_l$, para $n \geq l \geq m$.

Recordemos que el *teorema del límite central* nos dice que tenemos el límite en distribución

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N / \sqrt{N} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Motivados por este resultado consideremos la siguiente definición. Para $t > 0$, sea $S_t = S_n + (t - n)X_{n+1}$, si $n \leq t \leq n + 1$. Para N un entero positivo definimos $\Delta t = 1/N$ y $\Delta x = 1/\sqrt{N}$.

$$B_t^N = \Delta x S_{Nt} = S_{Nt} / \sqrt{N}.$$

En particular $B_1^N = S_N / \sqrt{N}$, por lo que el *teorema del límite central* implica

$$B_1 = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N / \sqrt{N} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

En general, por el *teorema del límite central*

$$B_t = \lim_{N \rightarrow \infty} B_t^N = \frac{\sqrt{t}S_{Nt}}{\sqrt{tN}} \xrightarrow{d} \sqrt{t}\mathcal{N}(0, 1) = \mathcal{N}(0, t).$$

El proceso de Wiener es el proceso dado por las variables aleatorias B_t . En la figura siguiente se muestran varias trayectorias de este proceso (la línea azul representa la desviación estándar de B_t).

Un teorema clásico de Wiener establece lo siguiente.

Teorema 1.1. *El proceso de Wiener se caracteriza por las siguientes propiedades:*

1. *El proceso comienza en cero: $B_0 = 0$.*
2. *B_t es continua \mathbb{P} -casi seguramente.*
3. *B_t tiene incrementos independientes: si $0 < s < t$, $B_t - B_s \perp B_u$, ($u \leq s$).*
4. *B_t tiene incrementos estacionarios con distribuciones: $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$.*

1.1. La ecuación del calor arquimediana

El proceso de Wiener también puede describirse utilizando la teoría de semigrupos y el operador de Laplace $\Delta = d^2/dx^2$ en el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$.

El *operador de Laplace*

$$\Delta = d^2/dx^2 : \text{Dom}(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

es un operador no acotado, positivo y autoadjunto. La ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \quad (1)$$

para un $f \in L^2(\mathbb{R})$ en el dominio del operador de Laplace, es la *ecuación del calor* homogénea arquimediana. Por el teorema de Hille–Yosida, este problema está bien planteado y su solución es un semigrupo $S(t)$ que denotamos usualmente por $e^{t\Delta}$.

Por otro lado, recordemos que la transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es una isometría de espacios de Hilbert dada por la integral impropia

$$\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)e^{2\pi i x \xi} dx, \quad (\varphi \in L^2(\mathbb{R})).$$

Además, la transformada de Fourier diagonaliza el operador de Laplace, ya que transforma la derivada en un operador de multiplicación:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}) \\ \Delta \downarrow & & \downarrow f \mapsto \xi^2 f \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}). \end{array} \quad (2)$$

Se sigue, por el teorema de *Hille–Yosida*, que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}) \\ S(t) \downarrow & & \downarrow f(\cdot) \mapsto f(\cdot) \exp(-t(\cdot)^2) \\ L^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}). \end{array}$$

Para encontrar una expresión explícita de $S(t)$ se introduce *el núcleo del calor* :

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{-t\xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/4t}. \end{aligned}$$

Teorema 1.2. *Bajo el teorema de Hille–Yosida*

$$B_t = e^{t\Delta} = e^{td^2/dx^2},$$

Además

$$u(x, t) = z(x, t) * f(x),$$

2. Ecuaciones pseudodiferenciales y procesos de Markov en \mathbb{Q}_p

En esta sección presentaremos los elementos del análisis p -ádico necesarios para introducir el operador de Vladimirov, el cual nos permitirá estudiar ecuaciones pseudodiferenciales y procesos de Markov en el campo de los números p -adicos.

2.1. El campo de los números p -ádicos

Un *valor absoluto* $|\cdot|$ sobre \mathbb{Q} es una función real valuada que satisface las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ si y sólo si $x = 0$,
2. $|xy| = |x| |y|$,
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{Q}$.

El teorema de Ostrowski nos dice que cualquier valor absoluto no trivial sobre \mathbb{Q} es equivalente al valor absoluto (arquimediano) usual, o un valor absoluto p -ádico $|\cdot|_p$, para algún primo p : si $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, x se representa de manera única como

$$x = p^k \frac{a}{b}, \quad (a, b \in \mathbb{Z}),$$

de tal manera que p no divide a ab y $k \in \mathbb{Z}$, la función

$$|x|_p := p^{-k}$$

define un *valor absoluto* en \mathbb{Q} que es no arquimediano, pues satisface la desigualdad

$$|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\},$$

para todo $x, y \in \mathbb{Q}$.

El *campo de los números p -ádicos* \mathbb{Q}_p es la completación de \mathbb{Q} con respecto a la métrica inducida por $|\cdot|_p$. Como en el caso de los números reales, las propiedades de valor absoluto implican que \mathbb{Q}_p es un campo topológico completo, que de hecho resulta localmente compacto.

Cualquier número p -ádico x tiene una *representación única* de la forma

$$a_\gamma p^\gamma + a_{\gamma+1} p^{\gamma+1} + a_{\gamma+2} p^{\gamma+2} + \cdots,$$

donde $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $a_\gamma \neq 0$. El entero γ , con $\gamma(0) = +\infty$, se llama el *orden p -ádico de x* . La *parte fraccionaria* de $x \in \mathbb{Q}_p$ está definida como

$$\{x\}_p = \begin{cases} a_\gamma p^\gamma + \cdots + a_{-1} p^{-1} & \text{if } \gamma < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } \gamma \geq 0. \end{cases}$$

El campo \mathbb{Q}_p es un campo topológico segundo numerable, localmente compacto y totalmente disconexo. El *anillo de enteros p -ádicos*

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p \leq 1\}$$

es el subanillo compacto más grande contenido en \mathbb{Q}_p . \mathbb{Z}_p es un anillo local con ideal máximo $p\mathbb{Z}_p$. Usualmente *la medida de Haar* dx del grupo topológico abeliano $(\mathbb{Q}_p, +)$ es normalizada por la condición $dx(\mathbb{Z}_p) = 1$, lo cual implica que $dx(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Un *carácter aditivo* de \mathbb{Q}_p es una función continua $\chi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$\chi(x + y) = \chi(x)\chi(y), \quad |\chi(x)| = 1,$$

para todos $x, y \in \mathbb{Q}_p$. La colección $\widehat{\mathbb{Q}}_p$ de todos los caracteres aditivos de \mathbb{Q}_p es un grupo topológico localmente compacto llamado el *dual de Pontryagin* de \mathbb{Q}_p .

Se puede ver fácilmente que la función

$$\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$$

define un *carácter aditivo* en \mathbb{Q}_p , por lo que $\chi_\xi(x) = \exp(2\pi i\{\xi x\}_p)$ es también un carácter para todo $\xi \in \mathbb{Q}_p$. Más aún, todos los caracteres de \mathbb{Q}_p son de esta forma y \mathbb{Q}_p es un grupo autodual en el sentido de Pontryagin $\widehat{\mathbb{Q}}_p \cong \mathbb{Q}_p$.

La *transformada de Fourier* de una función de prueba $\varphi \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ está dada por la integral impropia

$$\mathcal{F}\varphi(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x)\varphi(x)dx, \quad \text{para } \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

La transformada de Fourier es un isomorfismo lineal continuo del espacio $L^2(\mathbb{Q}_p)$ en sí mismo. Se tiene la fórmula de inversión:

$$\phi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\xi)\widehat{\phi}(\xi)d\xi \text{ para } \phi \in L^2(\mathbb{Q}_p).$$

Asimismo tenemos la igualdad de Parseval-Steklov

$$\int_{\mathbb{Q}_p} \phi(x)\overline{\psi}(x)dx = \int_{\mathbb{Q}_p} \widehat{\phi}(\xi)\overline{\widehat{\psi}}(\xi)d\xi.$$

2.2. Una ecuación de tipo parabólico en $L^2(\mathbb{Q}_p)$

En esta sección presentaremos el operador de Vladimirov y formularemos la ecuación del calor para este operador. Obtendremos que la solución fundamental de esta ecuación define un proceso Markoviano a tiempo continuo sobre el campo de los números p -ádicos.

Para cada $\alpha > 0$ el operador de Vladimirov

$$D_p^\alpha : \text{Dom}(D_p^\alpha) \subset L^2(\mathbb{Q}_p) \rightarrow L^2(\mathbb{Q}_p)$$

esta definido como el único operador que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{Q}_p) \\ D_p^\alpha \downarrow & & \downarrow f \mapsto |\cdot|_p^\alpha f \\ L^2(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{Q}_p), \end{array} \quad (3)$$

donde el operador de multiplicación de la vertical derecha tiene por dominio el conjunto más grande posible en $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

El operador de Vladimirov es un operador densamente definido positivo y autoadjunto. La ecuación pseudodiferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + D_p^\alpha u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{Q}_p, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases} \quad (4)$$

para una función $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ en el dominio de D_p^α . Este problema está bien planteado y el teorema de Hille–Yosida nos dice que su solución es el semigrupo $S_p(t) = e^{tD_p^\alpha}$. Más aún, por el teorema de Hille–Yosida y la definicon del operador de Vladimirov, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{Q}_p) \\ S_p(t) \downarrow & & \downarrow f \mapsto f \exp(-t|\cdot|_p^\alpha) \\ L^2(\mathbb{Q}_p) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & L^2(\mathbb{Q}_p) \end{array}$$

Para encontrar una expresión explícita de $S_p(t)$ se introduce *el núcleo del calor* :

$$Z_p(x,t) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\xi) \exp(-t|\xi|_p^\alpha) d\xi.$$

Integrando esta ecuación, tenemos la identidad

$$Z_p(x,t) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ p^n \leq \|x\|^{-1}}} p^n \left\{ \exp(-tp^{\alpha n}) - \exp(-tp^{\alpha(n+1)}) \right\}.$$

Con esta identidad es posible obtener condiciones en las probabilidades de transición para mostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.1. Sea $\alpha > 0$ y $S_p(t)$ el C_0 -semigrupo generado por el operador $-D^\alpha$. La solución del problema de Cauchy está dado por

$$u(x, t) = Z_p(x, t) * f(x),$$

para $t \geq 0$ y $f \in \text{Dom}(D_p^\alpha)$. Adicionalmente, $Z_p(x, t)$ es la función de probabilidades de transición de un proceso de Markov a tiempo continuo, homogéneo en el tiempo y en el espacio, y cuyas trayectorias son continuas por la derecha sin discontinuidades de segunda clase.

Referencias

- [1] Aguilar–Arteaga, Victor A., Estala–Arias, Samuel. *Pseudodiferencial Operators and Markov processes on Adèles*. P–Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications (2019) 89–113.
- [2] Aguilar–Arteaga, Victor A., Cruz–López, Manuel, Estala–Arias, Samuel. *A Heat Equation on some Adic Completions of \mathbb{Q} and Ultrametric Analysis*. P–Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications 07/2017; 9(3):165– 182.
- [3] Aguilar–Arteaga, Victor A., Cruz–López, Manuel, Estala–Arias, Samuel. *Harmonic Analysis on the Adèle ring of \mathbb{Q}* . (Abril 2018), arXiv:1803.01964.
- [4] Cruz–López, Manuel, Estala–Arias, Samuel. *Additive invariant ultrametrics on the finite adèle group of \mathbb{Q}* . P–Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications 04/2016; 8(2):89–114.