Introducción a las representaciones de posets

Isaías David Marín Gaviria[1]
Jornada de Álgebra y Aplicaciones - El Salvador 2021
Diciembre 13 al 17 de 2021 de manera virtual

Resumen

La teorá de representación de posets ordinarios nació y se desarrolló en la escuela de Kiev en la década de los 70 con el obejtivo de clasificar álgebras. Dicha clasificación se obtuvo aplicando los diferentes algoritmos de diferenciación. Por ejemplo, el criterio para posets de tipo de representación finita fue obtenido por M. Kleiner en 1972 utilizando el algoritmo de diferenciación con respecto a un punto maximal introducido por L. A. Nazarova y A. V. Roiter en el mismo año. Las propiedades categóricas de tal algoritmo fueron dadas por P. Gabriel en 1973 [3, 4] fundando así una nueva línea de investigación en la teoría de algoritmos de diferenciación que son functores que permiten establecer una equivalencia entre las categorías involucradas en el proceso de diferenciación. Dichos functores constituyen la principal herramienta para clasificar posets de diferentes tipos.

En 2000 A. V. Zabarilo y A. G. Zavadskij introdujeron posets equipados y dieron criterios para clasificar estos posets de un parámetro, poco después en 2003 A. G. Zavadskij clasificó posets equipados del tipo de representación mansa mediante el uso de algoritmos de diferenciación DI, DVII-DXVII para posets equipados con involución. En particular, A. G. Zavadskij publicó en 2005 un criterio de tipo de representación de crecimiento finito, para ello utilizó los algoritmos de diferenciación DVII-DIX [8, 9].

En este cursillo, presentaremos una breve descripción de esta teoría, mostrando algunos de los criterios obtenidos así como de los algoritmos de diferenciación usados para obtener estos criterios. También se presentarán las representaciones asociadas a los posets y las respectivas categorías de representaciones y los funtores entre ciertas categorías cocientes resultantes de este proceso.

También se presentarán algunas aplicaciones de la teoría de representación de posets a diferentes campos de la matemática. Por ejemplo, en teoría de números, se da un avance en la solución de un problema relacionado con composiciones de números propuesto por G.E. Andrews. También se presenta una categorificación de los números de Delannoy [2] en el sentido de C.M. Ringel y P. Fahr. Por otro lado, por medio de la aplicación de las matrices de Krawtchouk-Zavadskij o K Z-matrices se dan soluciones explícitas a sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales de

[1]Posición Posdoctoral Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia sede Medellín, imaringa@unal.edu.co

la forma $X'(t) - X^2(t)A = A$, (donde A es una $l \times l$-matriz conveniente de enteros). Tal solución aparece de la introducción de una interpretación del Cálculo clásico, el cual se ha llamado el Cálculo de Zavadskij [1], basado en K Z-matrices y algunas de sus propiedades probadas por A.G. Zavadskij en [11]. Finalmente, por medio del algoritmo de diferenciación D-VII para posets equipados se presentan un par de aplicaciones, la primera es en el procesamiento de imágenes y la segunda es el modelado de la acción de un virus y un antivirus en una red de computadores.

Referencias

[1] A.M. Cañadas and I.D.M. Gaviria, *The Zavadskij's Calculus*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications **44** (2019), no. 2, 211–227.

[2] A.M. Cañadas, I.D.M. Gaviria, and H. Giraldo, *Representation of equipped posets to generate Delannoy numbers*, Far East Journal of Mathematical Sciences **102** (2017), no. 8, 1677–1695.

[3] P. Gabriel, *Représentations indécomposables des ensemblés ordonnés*, Semin. P. Dubreil, 26 annee 1972/73, Algebre, Expose **13** (1973), 301–304.

[4] M.M. Kleiner, *Partially ordered sets of finite type*, Zap. Nauchn. Semin. LOMI **28** (1972), 32–41 (in Russian); English transl., J. Sov. Math **3** (1975), no. 5, 607–615.

[5] L.A. Nazarova and A.V. Roiter, *Representations and forms of weakly completed partially ordered sets*, Linear algebra and representation theory, Akad. Nauk Ukrain. SSR Inst. Mat., Kiev (1977), 19–55 (Russian).

[6] A.G. Zavadskij, *Differentiation with respect to a pair of points*, Matrix problems, Collect. sci. Works. Kiev (1977), 115–121 (in Russian).

[7] ———, *The Auslander-Reiten quiver for posets of finite growth*, Topics in Algebra, Banach Center Publ. **26** (1990), Part 1, 569–587.

[8] ———, *Tame equipped posets*, Linear Algebra Appl. **365** (2003), 389–465.

[9] ———, *Equipped posets of finite growth*, Representations of Algebras and Related Topics, AMS, Fields Inst. Comm. Ser. **45** (2005).

[10] ———, *On two point differentiation and its generalization*, Algebraic Structures and their Representations, AMS, Contemporary Math. Ser. **376** (2005).

[11] ———, *On the Kronecker Problem and related problems of Linear Algebra*, Linear Algebra and Its Applications **425** (2007), 26-62.

Una Introducción a la Teoría de Representaciones de Carcajes y sus Aplicaciones.

Pedro Fernando Fernández Espinosa
Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
pffernandeze@unal.edu.co

Resumen

La teoría de representaciones de álgebras es un área de las matemáticas que ha avanzado significativamente en los últimos tiempos, de hecho, actualmente es una de las áreas más activas en la investigación matemática, no solo por su potencial científico, sino por el fuerte impacto que ha tenido en las aplicaciones. En ese sentido, algunas de éstas se presentan de manera natural en diferentes áreas como teoría de particiones, combinatoria, teoría de números, geometría algebraica, análisis topológico de datos, criptografía entre otros [3–7, 10]. En un contexto más general el mayor impulso de ésta teoría se encuentra en los años cuarenta del siglo pasado, cuando mediante el uso de la misma se logra contribuir a la demostración de la primera y segunda conjetura de Brauer-Thrall [9].

En el estudio de la teoría de representaciones de álgebras se destaca el uso de carcajes o grafos dirigidos, dado que estos nos permiten visualizar los módulos de un álgebra dada, de una manera concreta como una colección de matrices, cada una de ellas asociadas a las fechas del carcaj. De hecho, uno de los factores más fascinantes de esta teoría es que los carcajes pueden ser usados para estudiar la teoría de representación de cualquier álgebra de dimensión finita [11]. En particular, la caracterización de las álgebras hereditarias de tipo representación finito en términos de carcajes fue dada por P. Gabriel en 1972 a través del uso de métodos diagramáticos en [8], allí se estableció que todo carcajo admite un número finito de representaciones indescomponibles no isomorfas si y solo si el grafo subyacente es un diagrama de Dynkin [11].

En este curso se presentarán de manera autocontenida y ejemplificada algunas nociones básicas de la teoría de representaciones de carcajes tales como: la forma cuadrática asociada a ellos, su correspondiente grupo de raíces y la transformación de Coxeter, lo anterior con el fin de enunciar e ilustrar por medio de algunos ejemplos el teorema de Gabriel y la prueba dada por I. M. Gelfand y A. V. Ponomarev [2], en la que se muestra una biyección entre las raíces positivas de la forma cuadrática asociada a un carcaje y sus correspondientes representaciones indescomponibles [1].

Referencias

[1] I. Assem, D. Simson, and A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge UK, 2006. 1-457.

[2] Bernstein I., Gelfand I., Ponomarev *Coxeter Functors and Gabriel's Theorem*, 17-32.

[3] Cañadas. A. M, Vanegas. N.P.P, Quitian. M.H. *Visual Cryptography Schemes Based in k-linear Maps.* Lecture Notes In Computer Science, 2013.

[4] Cañadas. A. M, Gaviria. I.D.M, P.F.F. Espinosa *Representations of a Tetrad to Generate Schemes of Emerging Images.* FJMS, 2013.

[5] Cañadas. A. M, Gaviria. I.D.M, P.F.F. Espinosa *Categorification of Some Integer Sequences via Kronecker Modules.* JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications, 2016.

[6] P. Fahr and C. M. Ringel, *A partition formula for Fibonacci numbers*, J. Integer Seq. **11** (2008), no. 08.14, 1-9.

[7] ______, *Categorification of the Fibonacci numbers using representations of quivers*, J. Integer Seq. **15** (2012), no. 12.2.1, 1-12.

[8] Gabriel, P. *Unzerlegbare Darstellungen I*, Manuscripta Math 6, 71-103 (1972).

[9] Giraldo. H. *Una introducción a la teoría de representaciones de álgebras*, Lecturas Matemáticas, 2015.

[10] Steve.Y. Oudot. *Persistence Theory: From Quiver Representations to Data Analysis.* American Mathematical Society, 2015.

[11] Schiffler Ralf. *Quiver Representations.* CMS Book in Mathematics. New York. Springer, 2014.

Finite groups and Brauer configurations

Alex Sierra Cárdenas

Key words and phrases: Finite groups, cyclic groups, Brauer configuration induced by a finite group.

Abstract

In this minicourse we initially study the basic aspects of the finite group theory, such as subgroups, order of a group, order of an element, etc. We also present a complete exposition of the properties and features of the finite cyclic groups. Then, we define a Brauer configuration and show that any finite group of an order different from a prime number induces a family of Brauer configurations. The concept of *subgroup-occurrence* of an element in a group is then introduced, and using some aspects of the representation theory of a Brauer configuration algebra we demonstrate some combinatorial relations satisfied by a finite group.

References

[GS] Green, E. L., Schroll, S., *Brauer Configuration Algebras: A Generalization of Brauer Graph Algebras*, Bull. Sci. math., **141**, 2017, 539-572.

[S] Sierra, A., *Introducción a la teoría de grupos*, Notas de clase del curso Álgebra I de la Universidade Federal do Pará.

[S2] Sierra, A.,*The Dimension of the center of a Brauer configuration algebra*, Journal of Algebra, **510**, 2018, 289-318.

[S3] Sierra, A., *The Cartan matrix of a Brauer configuration algebra*, 2018, available in `http://arxiv.org/pdf/1808.03194.pdf`