Teselaciones hiperbólicas en el semiplano.

Ernesto Américo Hidalgo Castellanos

Matemática y su Didáctica 2025
Escuela de Matemática
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Universidad de El Salvador

16 de julio de 2025

Índice

INTRODUCCIÓN

Introducción

Las teselaciones son patrones geométricos que cubren completamente el plano, sin superposiciones ni huecos, utilizando figuras congruentes. La idea de la charla es mostrar en primer lugar como se hace geometría en el modelo del semiplano de Poincaré, en segundo lugar la analogía que existe entre la forma de ir generando las teselas en uno y otro caso es básicamente la misma, a través de reflexiones.

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

Todo comienza con:
Si una línea recta que corta a otras dos líneas rectas produce ángulos internos del mismo lado que sean menores que dos rectos, entonces las dos líneas se encontrarán, si se prolongan del mismo lado de la línea recta, en que dos ángulos son menores que dos rectos.
Proposición 29, Libro I de los Elementos de Euclides.

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

El quinto postulado de Euclides, al que nos referimos como el postulado de las paralelas, era de una naturaleza mucho más sofisticada que los otros postulados y axiomas. Euclides parece haber reconocido esto él mismo, ya que pospuso su uso tanto como le fue posible y tuvo cuidado de desarrollar los teoremas de congruencia estándar para triángulos sin el postulado de las paralelas.

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

Euclides fue criticado por hacer de esto un postulado y no un teorema. Proclo (410-485), quien representó a la escuela de Platón en la Atenas del siglo V, dejó un extenso comentario sobre el primer libro de los Elementos de Euclides. Su opinión sobre el quinto postulado es inequívoca:
"Esto debería eliminarse por completo de los postulados. Porque es un teorema que invita a muchas preguntas, que Ptolomeo propuso resolver en uno de sus libros, y requiere para su demostración una serie de definiciones, así como teoremas"(Proclo (1970), p. 150).

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

Según la visión moderna, estos postulados son incompletos y algo engañosos.

Aun así, dan una idea del tipo de suposiciones que deben hacerse y son de interés histórico.

Euclides demostró la gran fuerza de su genio al introducir el Postulado V, que no es evidente como los demás. Además, su reticencia a introducirlo justifica que se le considere el primer geómetra no euclidiano.

Entre su época y la nuestra, cientos de personas, al considerarlo complicado y artificial, han intentado deducirlo como una proposición.

Pero solo lograron reemplazarlo por varias suposiciones equivalentes, como las cinco siguientes:

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

1. *Dos rectas paralelas son equidistantes*. (Posidonio, siglo I a.C.)
2. *Si una recta corta a una de dos paralelas, también corta a la otra*. (Proclo, 410-485 d.C.)
3. *Dado un triángulo, podemos construir un triángulo semejante de cualquier tamaño*. (Wallis, 1616-1703.)
4. *La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos*. (Legendre, 1752-1833.)
5. *Tres puntos no colineales siempre están sobre una circunferencia*. (Bolyai Farkas, 1775-1856.)

¿Es Euclides el primer geómetra no euclidiano?

La frase atribuida al matemático Bernhard Riemann, **“el espacio es ilimitado, más que infinito”**, refleja su concepción revolucionaria sobre la geometría y la naturaleza del espacio, desarrollada en su famosa conferencia "Sobre las hipótesis que sirven de fundamento a la geometría"(1854). Para entenderla, es clave diferenciar dos conceptos:

- Ilimitado (sin fronteras): Un espacio es ilimitado si no tiene bordes o límites físicos. Por ejemplo, en la superficie de una esfera (como la Tierra), puedes viajar indefinidamente sin llegar a un “borde”, pero el espacio no es infinito en extensión.
- Infinito (sin fin en extensión): Un espacio es infinito si su tamaño no está acotado (como una línea recta euclidiana que se extiende indefinidamente).

Conceptos previos.

Conceptos previos

Consideremos el conjunto $\mathbb{E}^2$ de puntos del plano y $\Phi : \mathbb{E}^2 \longrightarrow \mathbb{E}^2$ una aplicación. Se dice que Φ es una ISOMETRÍA si tiene la propiedad de conservar la distancia entre puntos; es decir, si dos puntos P y Q guardan entre sí una distancia l, la distancia que guardan sus imágenes por la transformación es también l. Así, $d(P, Q) = d(\Phi(P), \Phi(Q)) = l$.

Conceptos previos

- **Traslación**: Desplaza todos los puntos una misma distancia en una dirección fija.
- **Rotación**: Giro de ángulo θ alrededor de un punto.
- **Reflexión**: Refleja puntos sobre una recta (eje de simetría).
- **Reflexión deslizante**: Reflexión + traslación paralela al eje.

Conceptos previos

Toda Isometría puede escribirse como la composición de a lo sumo 3 Reflexiones.

Geometría hiperbólica
La geometría hiperbólica es una de las geometrías no euclidianas más importantes, donde no se cumple el V postulado de Euclides sobre las paralelas. En lugar de tener solo una paralela por un punto exterior a una recta, aquí existen infinitas rectas paralelas que no intersecan a la recta dada.
En esta geometría, los términos primitivos son los mismos que en la geometría de Euclides: punto, línea, línea recta, superficie y superficie plana (plano).

Postulado Fundamental
Negación del V postulado de Euclides: Dada una recta L y un punto P fuera de ella, existen infinitas rectas que pasan por dicho punto y nunca se intersecan con L.

Conceptos previos

El modelo del semiplano de Poincaré es una representación de la geometría hiperbólica dentro de un semiplano euclidiano.
Fue propuesto por el matemático francés Henri Poincaré en el siglo XIX y es uno de los modelos más utilizados para visualizar y estudiar propiedades hiperbólicas.

Conceptos previos

Semiplano de Poincaré

Consiste en el semiplano superior del plano euclidiano:
$\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

- Frontera $(y = 0)$ no pertenece al modelo
- Métrica hiperbólica: $ds^2 = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$

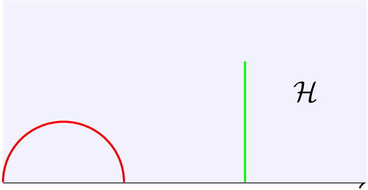
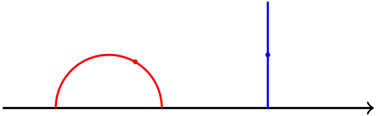


Figura 1: Representación del semiplano de Poincaré

Tipos de rectas":

- Semicírculos ortogonales al eje x
- Rectas verticales



La métrica hiperbólica entre los puntos $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ se define:

$$d = \text{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1 y_2}\right)$$

Ejemplo

La distancia entre $A(1,1)$ y $B(3,1)$ sigue la métrica:

$$d = \text{arcosh}\left(1 + \frac{(3-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1}\right)$$

Conceptos previos

- **Ángulos**: Coinciden con medida euclidiana (modelo conforme)
- **Triángulos**: $\alpha + \beta + \gamma < 180^\circ$
- **Área**: $A = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$
- **Paralelismo**: Infinitas paralelas por un punto exterior

Teselaciones.

Teselaciones.

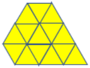
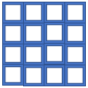
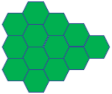
Un teselado es un patrón de figuras o polígonos que se repiten con regularidad para cubrir el plano o una superficie plana.
Las principales características de un teselado son:

- Debe cubrir todo el plano, sin que haya espacios.
- Las figuras o polígonos no deben superponerse
- Al coincidir un vértice de cada figura en un punto, la suma de los ángulos que ahí coinciden debe ser de 360°

Teselaciones.

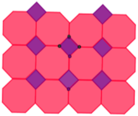
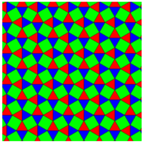
Hay 3 tipos de teselados:

1. los regulares,

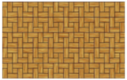




2. los semirregulares

Teselados semirregulares

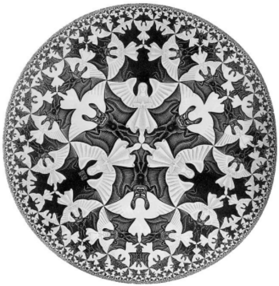



3. y los irregulares.



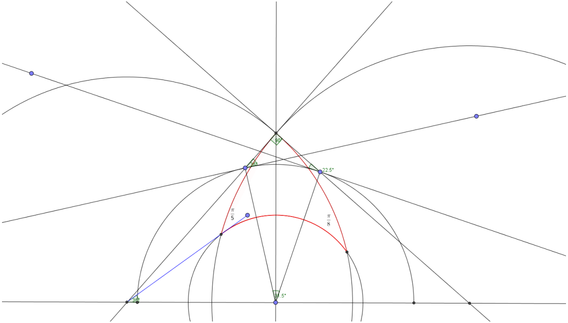

Teselaciones.

Las teselaciones hiperbólicas son una descomposición uniforme del plano hiperbólico por piezas del mismo tipo sin que éstas se sobrepongan ni que dejen espacios entre ellas. Así, una teselación triangular hiperbólica es una descomposición del plano hiperbólico por triángulos

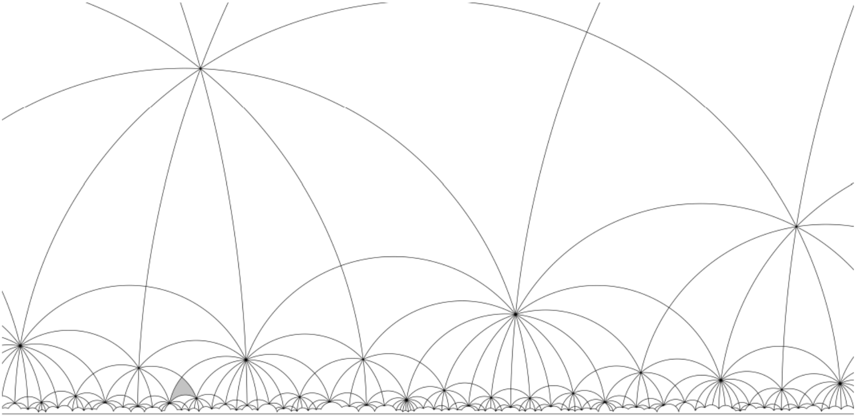


Teselaciones.

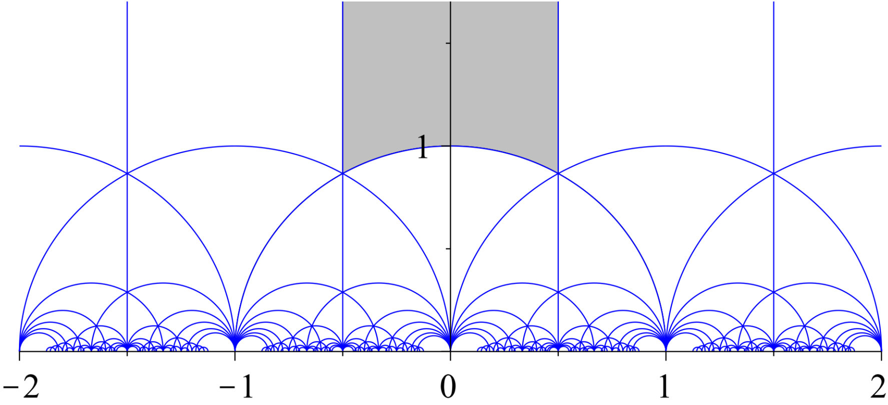
Construcción de un triángulo en el modelo del semiplano superior.
En la geometría hiperbólica tres ángulos determinan un triángulo hiperbólico. De hecho, para cualesquiera ángulos dados α, β, γ con suma $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, existe un triángulo único, salvo congruencia.



Teselación en el modelo del semiplano superior.



Teselaciones.



Referencias

[1] Robin Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Springer New York, 2010

[2] H. S. M. Coxeter, Non-Euclidean Geometry, Mathematical Association of America Textbooks 1998.

[3] Antonio Lascurain Orive, UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA BIDIMENSIONAL, Segunda edición, México, D.F. : Universidad Nacional Autónoma de Mexico, 2015.

[4] López Argueta y Vásquez Hernández, (2017), DE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA A LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA. [Tesis de licenciatura, Universidad de El Salvador].

¡Gracias!