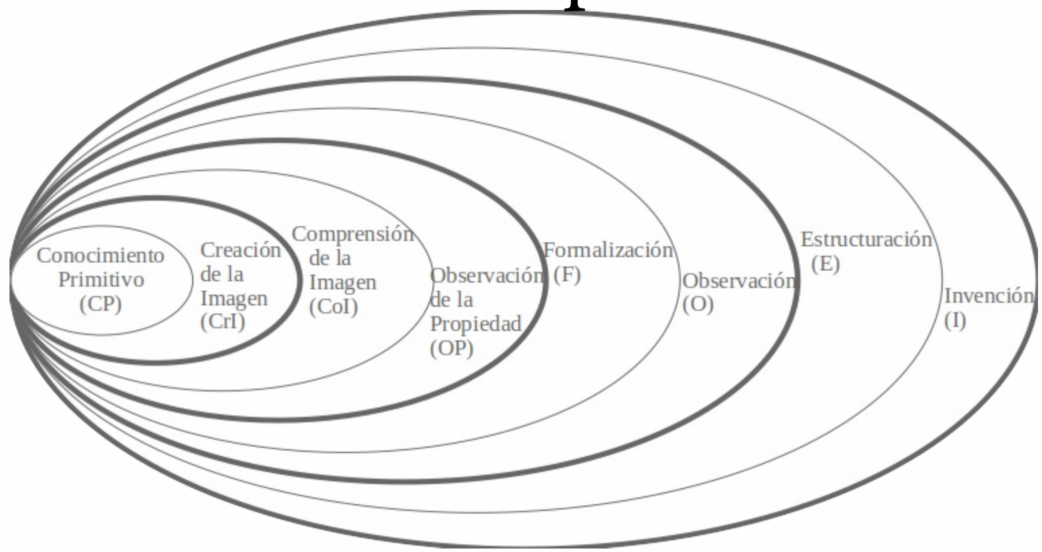
MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA 2025

El Modelo de Pirie-Kieren, un modelo de comprensión de conceptos matemáticos



Eduardo Adam Navas-López
Universidad de El Salvador (El Salvador)
eduardo.navas@ues.edu.sv

Agenda

- Teoría (brevemente)
- Algunos conceptos estudiados
- Ejemplo local
- Proyectos de investigación en curso

Imágenes mentales
e
Imágenes de concepto
en
Didáctica de la Matemática

MATEMÁTICA
Y SU DIDÁCTICA
2025

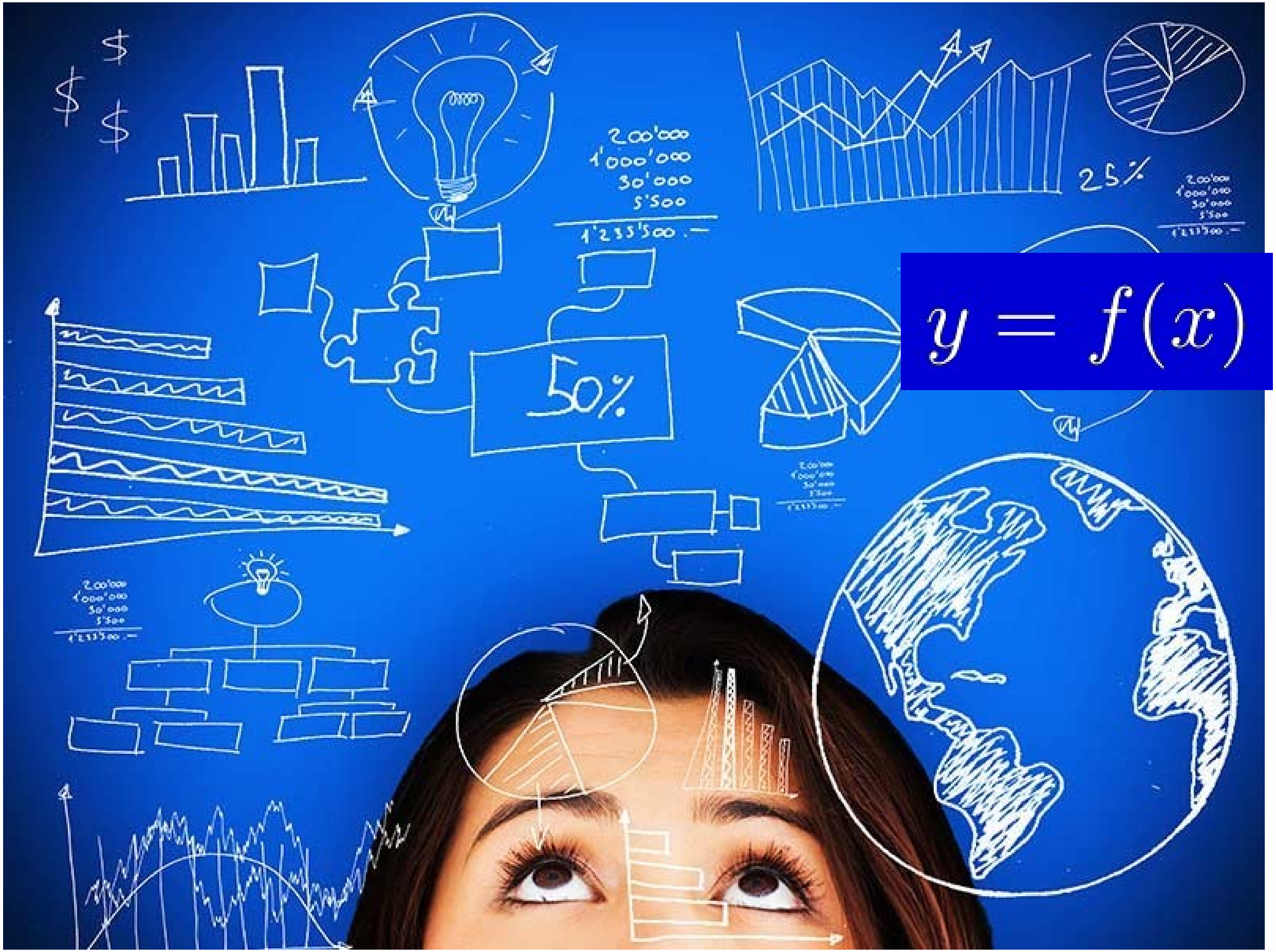
Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function

[Definición de Concepto, Imagen de Concepto y la Noción de Función]

Shlomo VINNER (1983)

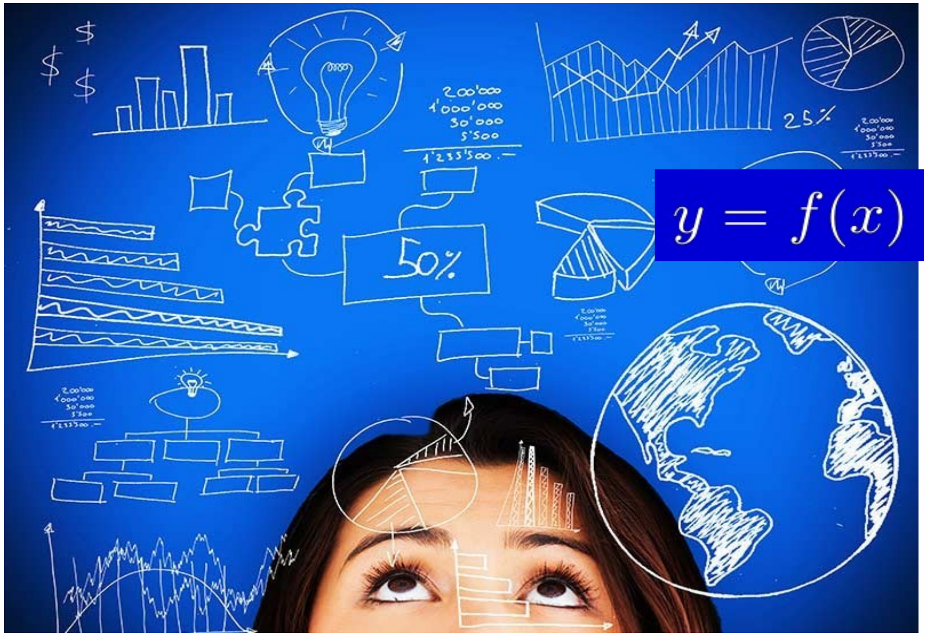
International Journal
of Mathematical Education
in Science and Technology,
Volumen 14, número 3, páginas 293-305,
DOI: 10.1080/0020739830140305

Imagen Mental



$$y = f(x)$$

Imagen de un concepto



$$y = f(x)$$

+

Propiedades:

- Los triángulos tienen tres lados
- Una función continua es aquella que se puede dibujar sin levantar el lápiz

Definición de un Concepto

Es una **definición verbal** que explica de forma precisa un concepto.

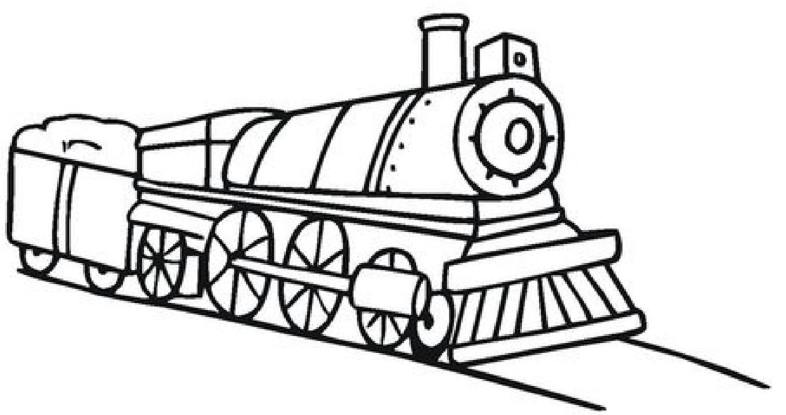
Para muchos conceptos **no tenemos definiciones** pero sí sus imágenes:

- **casa**
- **escritorio**
- **aula**
- **pizarra**
- **naranja**

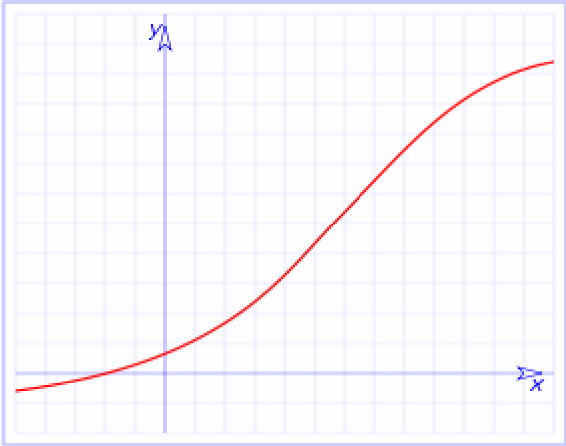
Estas son **definiciones ostensivas**

Definición ostensiva

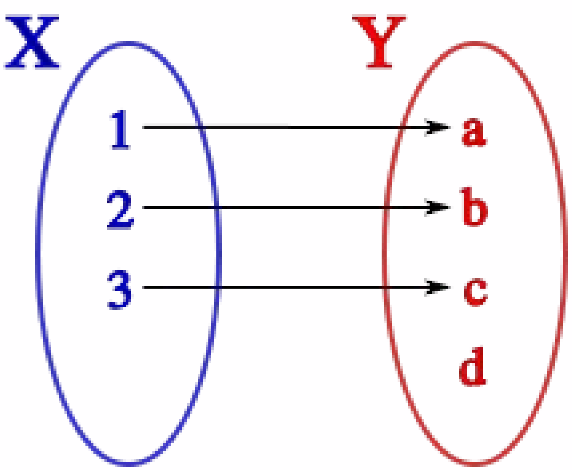
Ese es un tren



Estas son funciones



$$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)$$



Las definiciones en el aprendizaje

1. Para manipular conceptos (es decir, trabajar con ellos) **se necesita la imagen del concepto**, no su definición.
2. Cuando se introduce un concepto por medio de su definición, **la definición permanece inactiva** o incluso se olvida.
3. En el pensamiento **casi siempre** es la imagen del concepto la que es evocada y no su definición.

Las definiciones en el aprendizaje

- Tomamos o construimos definiciones **cuando nos piden explicar** el concepto a alguien.

- Las definiciones construidas por nosotros son el **resultado de nuestra experiencia** con los conceptos.

- **Son descripciones** de nuestra imagen del concepto.

Las definiciones en el aprendizaje **formal**

- A veces, **la razón de requerir las definiciones** es por las creencias de:
  - que las definiciones ayudarán a formar las imágenes de concepto
  - que serán útiles para llevar a cabo algunas tareas cognitivas

Un modelo de la Estructura Cognitiva «Dos celdas»:

Definiciones del concepto:

- <def_1>
- <def_2>
- …

Imágenes del concepto:

- <img_1>
- <img_2>
- …

Pueden tener diferentes relaciones

- Ambas pueden estar vacías (cuando no se sabe nada)
  - Ej. **Variedad Diferenciable de Riemann**

Definiciones del concepto:

- ??

Imágenes del concepto:

- ??

Pueden tener diferentes relaciones

- Podemos tener imágenes de concepto pero no la definición
  - Para conceptos cuya definición nos fue dada de forma ostensiva, **no tenemos la definición**, por ejemplo para «avión», «bus», «perro», «pupitre», «pizarra», «ventana», pero sí tenemos **la imagen del concepto**.

Definiciones del concepto:

- ??

Imágenes del concepto:




Pueden tener diferentes relaciones

- Podemos tener definición pero ninguna imagen
  - Cuando comenzamos a estudiar un tema de matemática y primero aprendemos la definición sin tener idea de qué se trata.

Definición del concepto:

- Los números complejos son aquellos números que tienen la forma $a+bi$, donde $a,b \in \mathbb{R}$ e i es la raíz cuadrada de -1.

Imágenes del concepto:

- ??

Pueden tener diferentes relaciones

- Pueden ser casi iguales (cuando la definición es en sí misma una propiedad)

Definición del concepto:

- La familia exponencial de parámetro escalar es un conjunto de funciones de distribución cuya función de densidad puede expresarse de la forma:

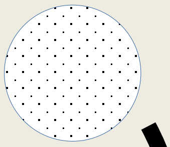
$$f_X(x;\theta) = h(x)\cdot \exp(\eta(\theta)\cdot T(x) - A(\theta))$$

donde

$$h(x),\ \eta(\theta),\ T(x),\ \text{y}\ A(\theta)$$

son funciones conocidas

Imágenes del concepto:

- 

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}}$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\mu\cdot x-\frac{\mu^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\mu\cdot x-\frac{\mu^2}{2}}$$

Donde:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\mu \cdot x - \frac{\mu^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Donde:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\eta(\mu) = \mu$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$f_X(x;\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2} - \frac{\mu^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\mu \cdot x - \frac{\mu^2}{2}}$$

Donde:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\eta(\mu) = \mu$$

$$T(x) = x$$

Ejemplo

- Demuestre que la distribución normal de varianza unitaria y media desconocida pertenece a la familia exponencial:

$$
\begin{aligned}
f_X(x;\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu-\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\frac{2x\mu}{2}-\frac{\mu^2}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot e^{\mu \cdot x - \frac{\mu^2}{2}}
\end{aligned}
$$

Donde:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

$$\eta(\mu) = \mu$$

$$T(x) = x$$

$$A(\mu) = \frac{\mu^2}{2}$$

Pueden tener diferentes relaciones

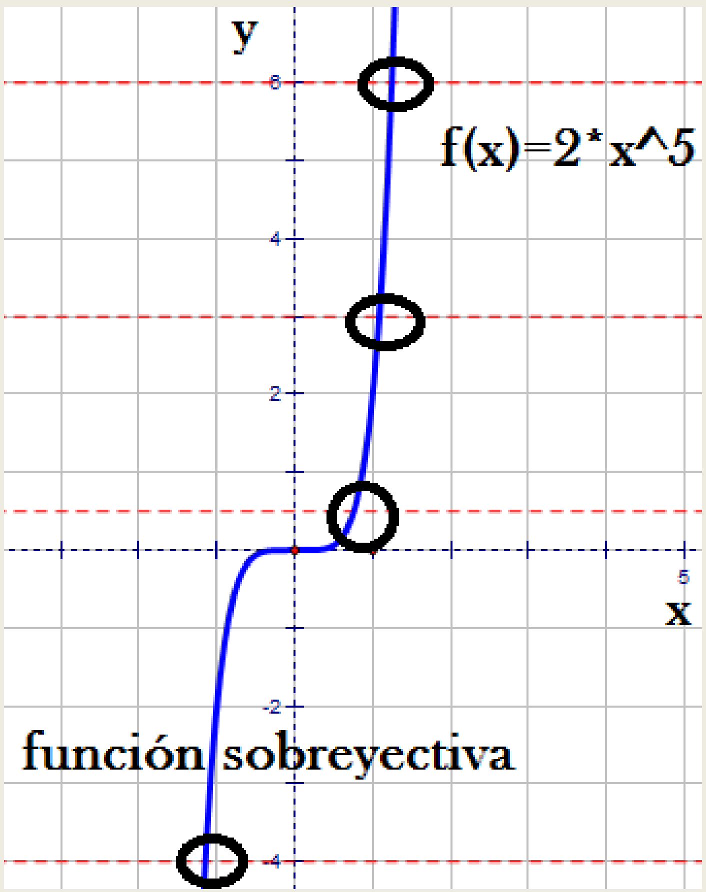
- Pueden estar relacionadas, interactuar o pueden ser <u>independientes</u> (Ej. Función sobreyectiva)

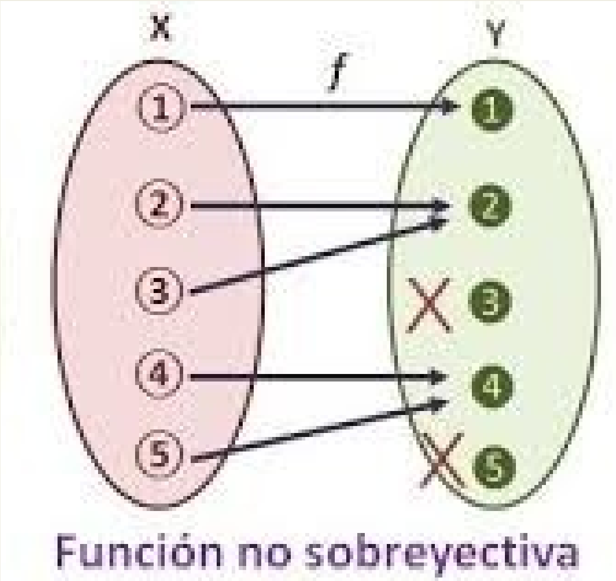
Definición del concepto:

- Una Función $f : A \longrightarrow B$ es Sobreyectiva, si y sólo si:

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)[f(x) = y]$$

Imágenes del concepto:



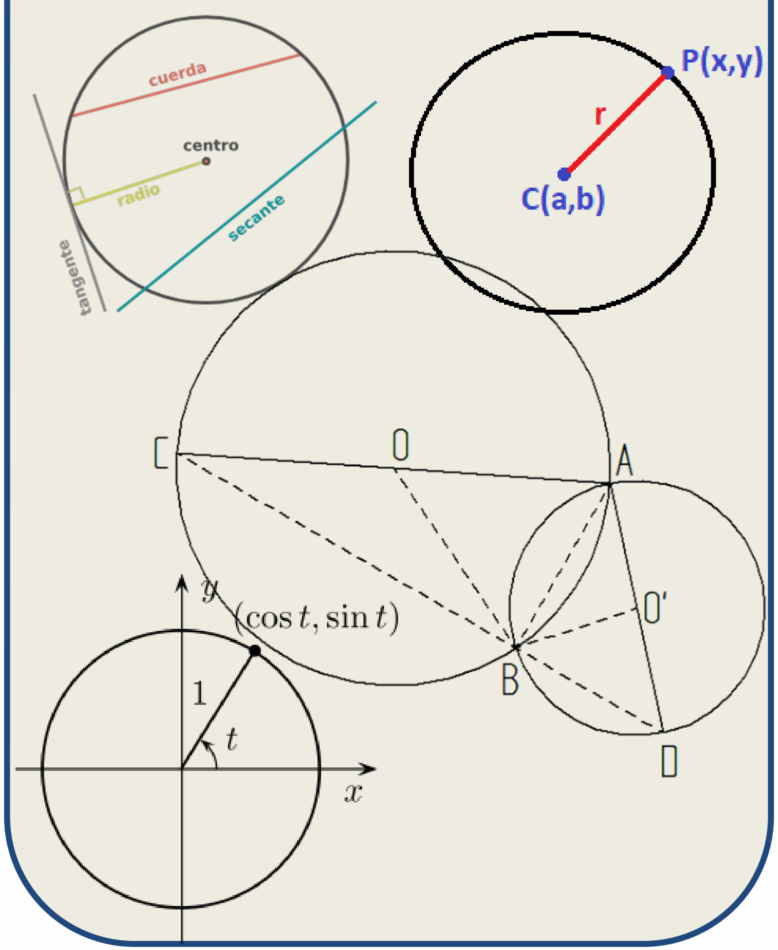


Se pueden tener varias definiciones de un mismo concepto

Definiciones del concepto **circunferencia**:

- Una cosa redonda (0)
- Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado Centro (1)
- El lugar geométrico de los puntos P=(x,y) en el plano tales que ||P-C||=r, con r∈ℝ. (2)
- Una curva de curvatura constante sin torsión (3, geometría diferencial)
- Cualquier curva cerrada simple que sea homeomorfa a la circunferencia de la geometría usual (4)

Imágenes del concepto:



El artículo continúa con el análisis de cómo se forman y cómo interactúan los contenidos de estas dos celdas…

También presenta una exploración empírica donde confirmó estas teorizaciones…

Conclusiones

- La definición y algunos ejemplos no son suficientes para formar la imagen del concepto deseable.
- Numerosos factores determinan la formación de la imagen del concepto, algunos fuera de nuestro control. «Escribir un texto bonito» no es suficiente.

Conclusiones

- Las imágenes mentales que no son reforzadas constantemente tienen mayores probabilidades de ser olvidados y así distorsionar la Imagen del Concepto.

- Los alumnos pueden aprobar aún cuando tienen una Imagen de Concepto equivocada.

Conclusiones

- Si como profesores queremos que los alumnos tengan correctas y completas sus Imágenes de Concepto, se requieren más tiempo y más esfuerzos pedagógicos.

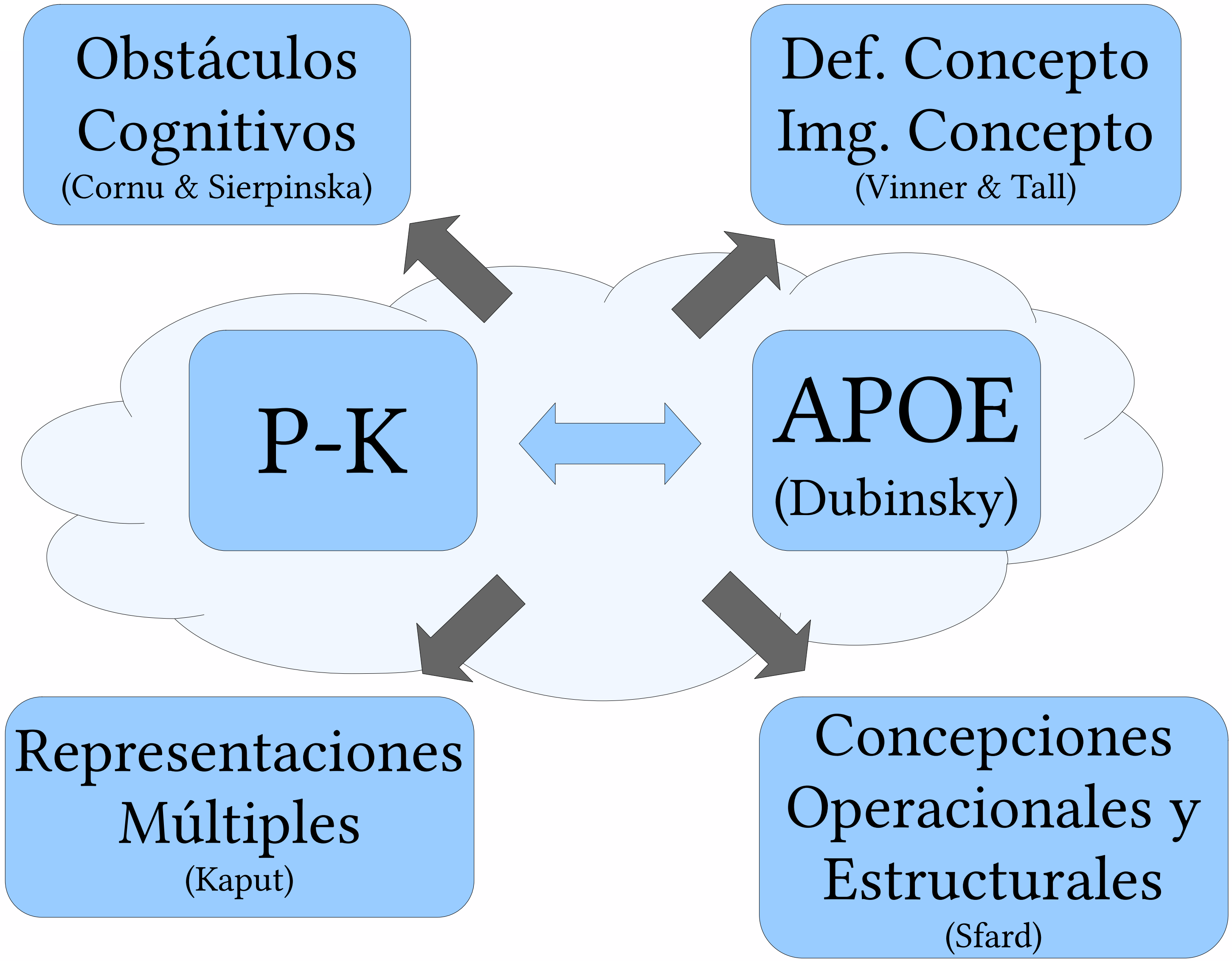
Modelo de Pirie y Kieren

Meel, D. E. (2003). **Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE.**

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6(3), 221-278.

https://relime.org/index.php/relime/article/view/546

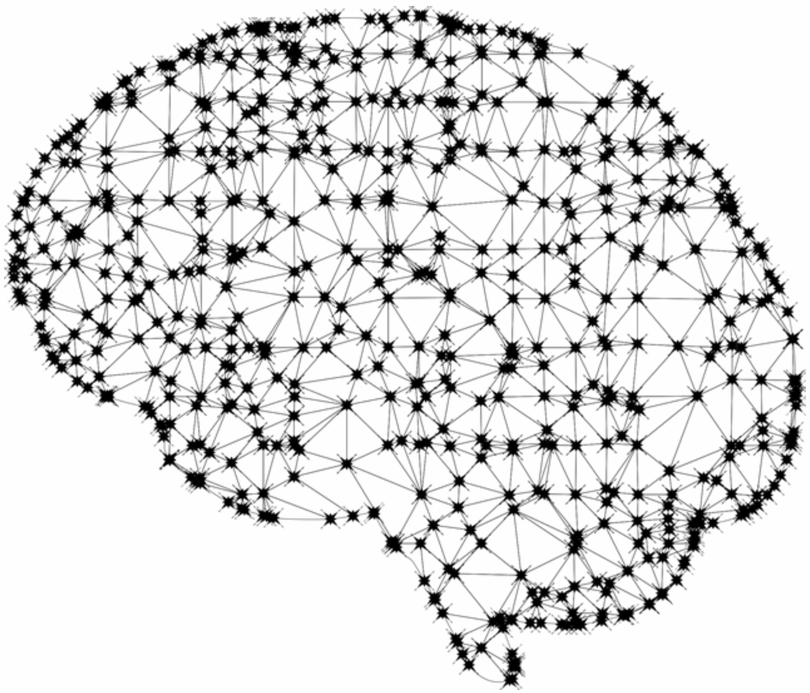
Primera aproximación



(Meel, 2003)

Comprensión Matemática

- Existen múltiples aproximaciones al concepto Comprensión (Meel, 2003).
- Una de estas aproximaciones es la base del modelo de Pirie y Kieren (1989):
- **La comprensión matemática** se puede definir como **estable pero no lineal**. Es un fenómeno **recursivo**, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia **los niveles de sofisticación**.
- De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él.

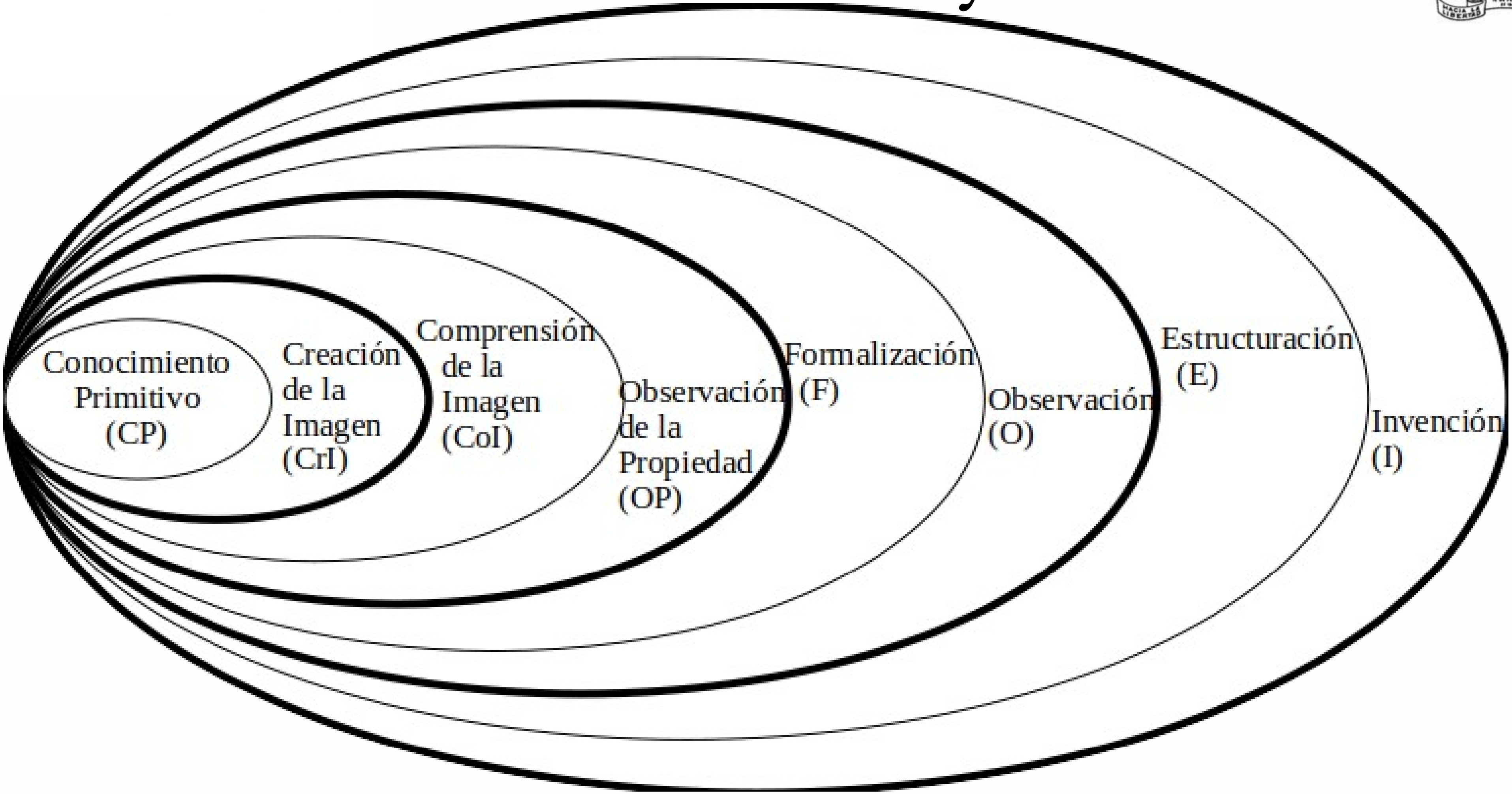


Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1989). **A recursive theory of mathematical understanding**. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 7–11. https://www.jstor.org/stable/40248156

Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1994). **Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?**. En P. Cobb (Ed.), *Learning Mathematics* (pp. 61–86). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_3.

MATEMÁTICA Y SU DIDÁCTICA 2025

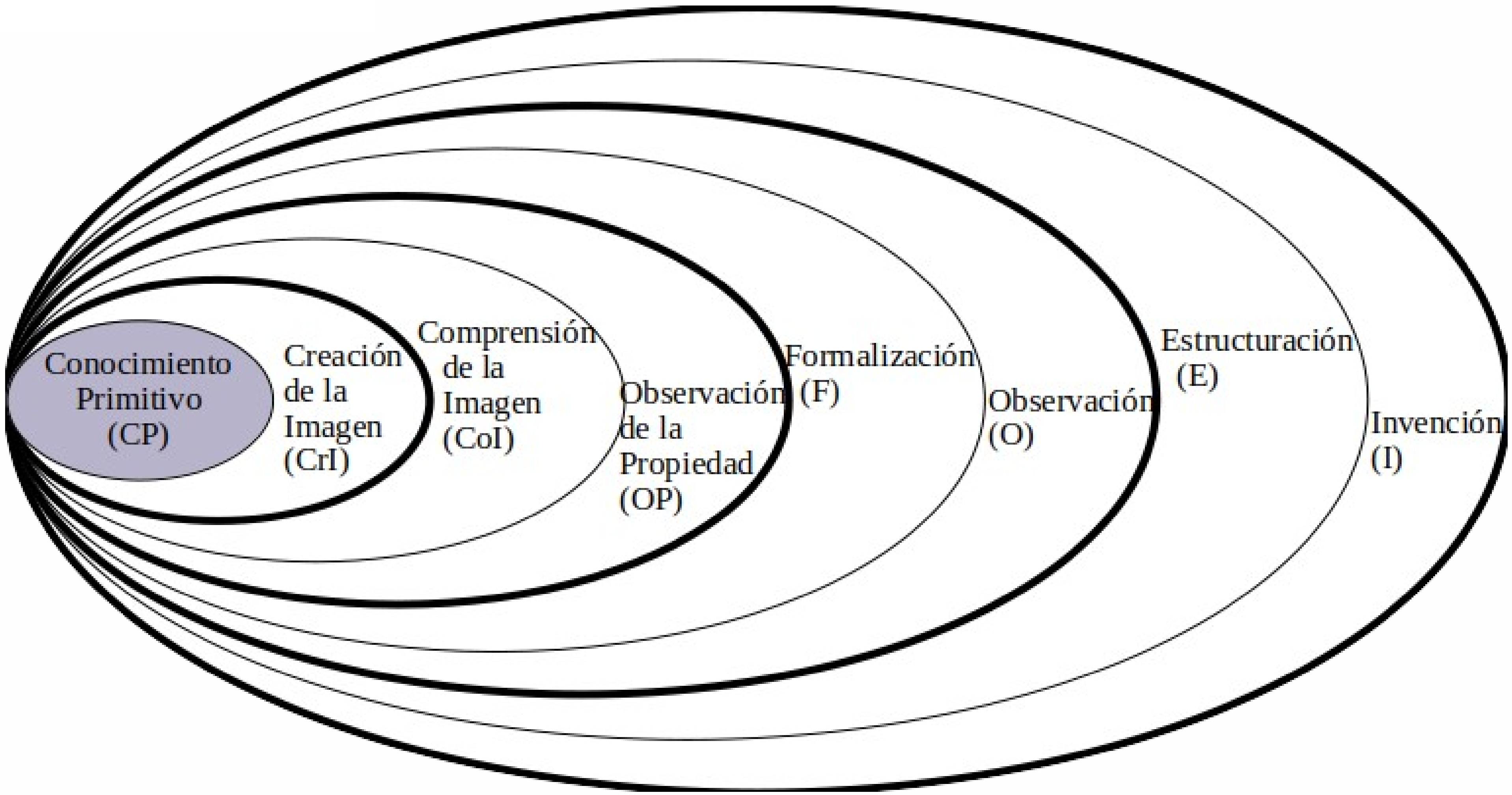
El Modelo de Pirie y Kieren



1.-Primitive Knowing
2.-Image Making
3.-Image Having
4.-Property Noticing
5.-Formalising
6.-Observing
7.-Structuring
8.-Inventising

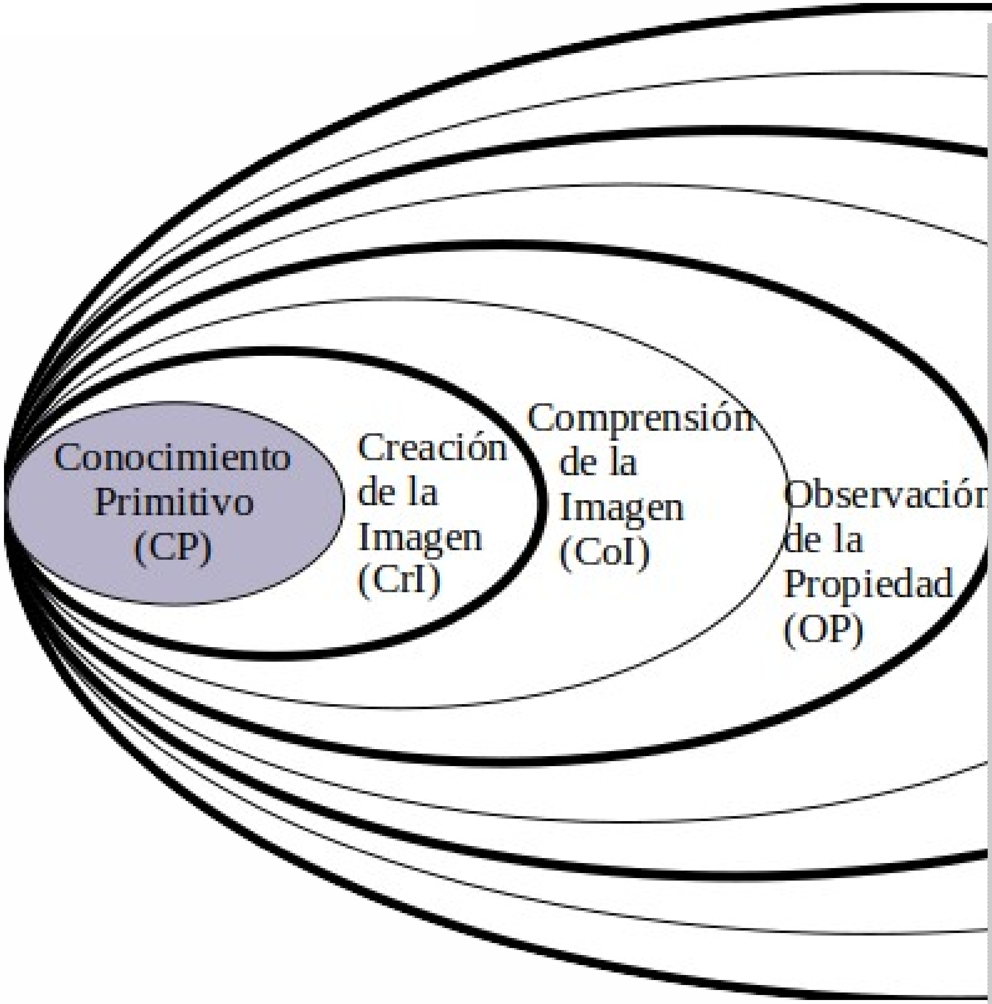
(Pirie y Kieren,1989, 1994) [con las traducciones de Meel (2003)]

El Modelo de Pirie y Kieren



(Pirie y Kieren,1989, 1994)

El Modelo de Pirie y Kieren

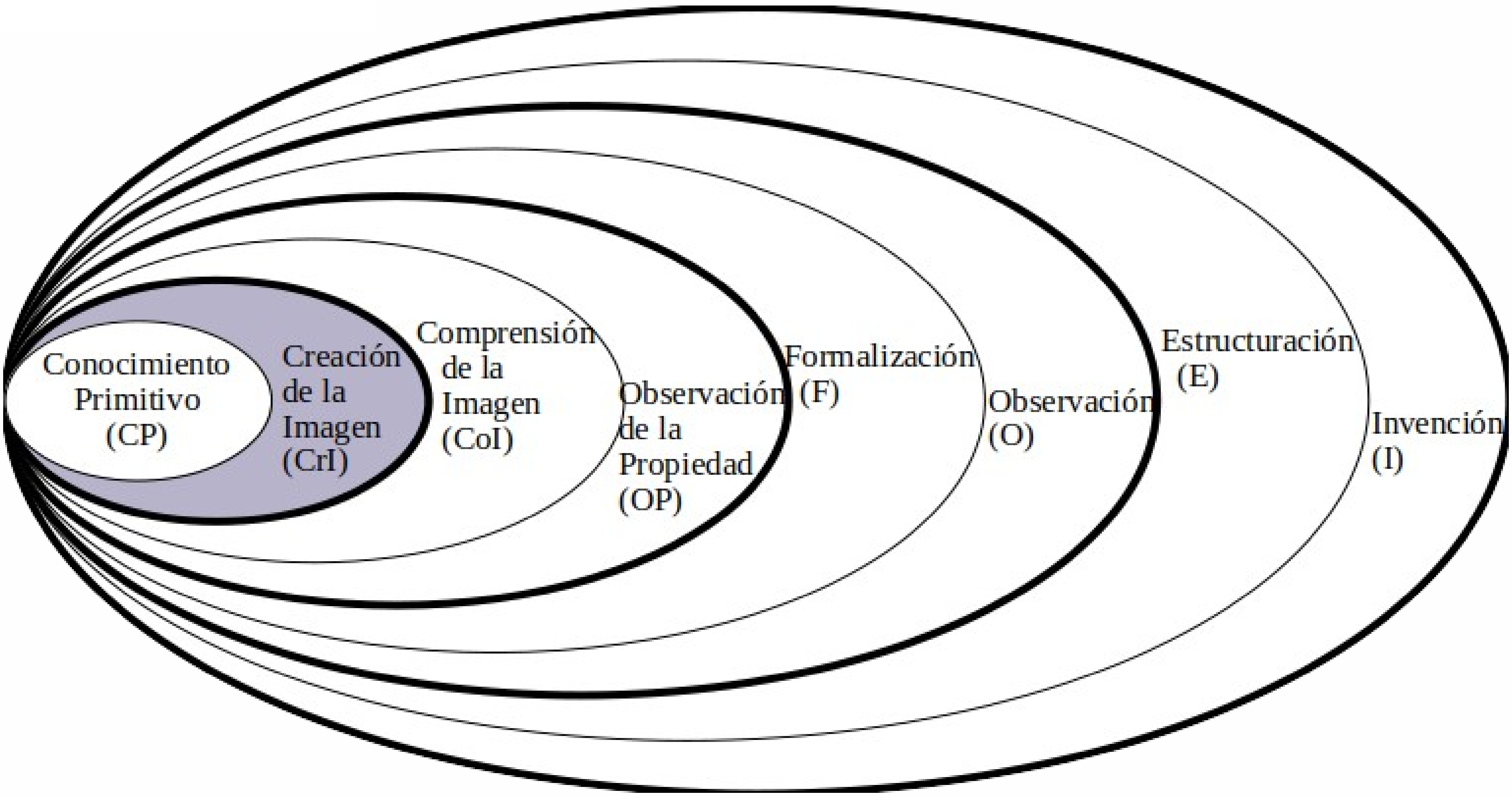


Se refiere al conocimiento previo que el alumno tiene. Es el punto inicial, posiblemente una gran cantidad de información que puede o no dar forma a la evolución de la comprensión.

Está formado por todo lo que el estudiante sabe y puede hacer excepto el conocimiento sobre el concepto considerado.

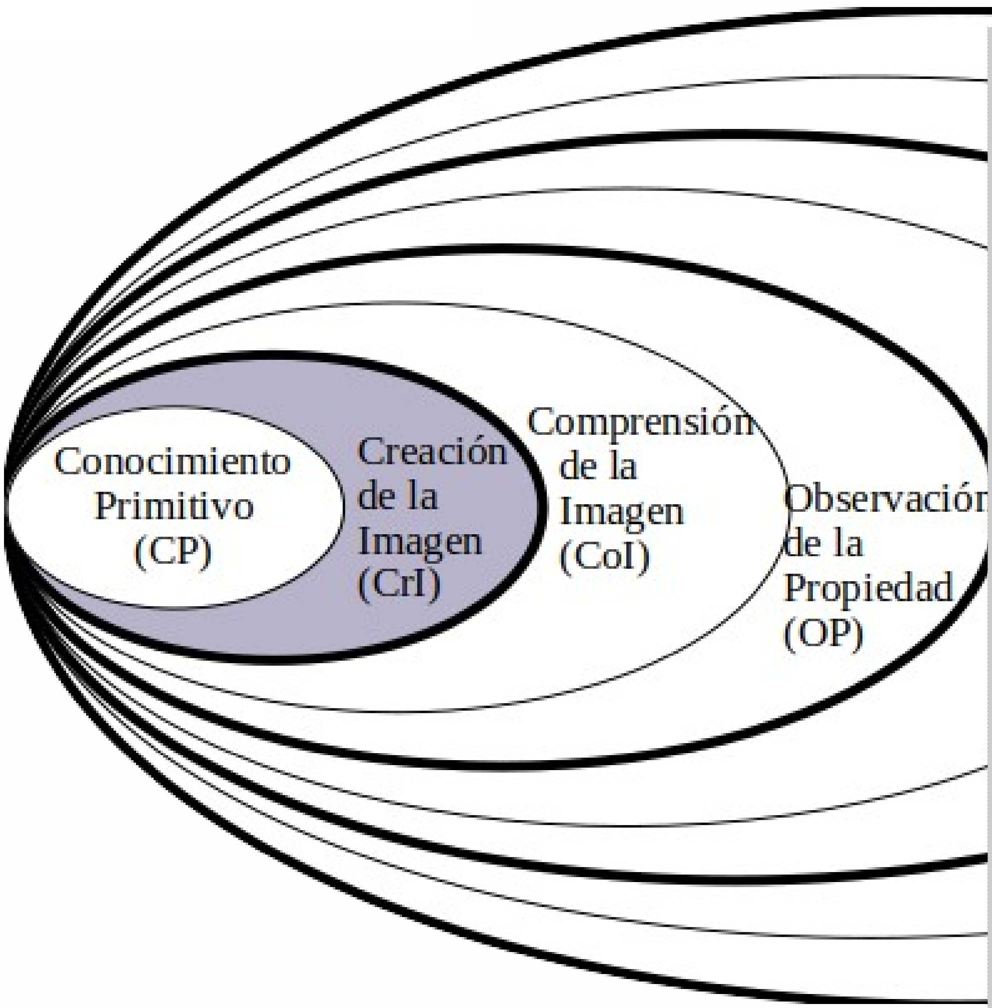
Lo que el estudiante ya sabe sobre el concepto objeto de estudio forma parte del resto de niveles del modelo.

El Modelo de Pirie y Kieren



(Pirie y Kieren,1989, 1994)

El Modelo de Pirie y Kieren

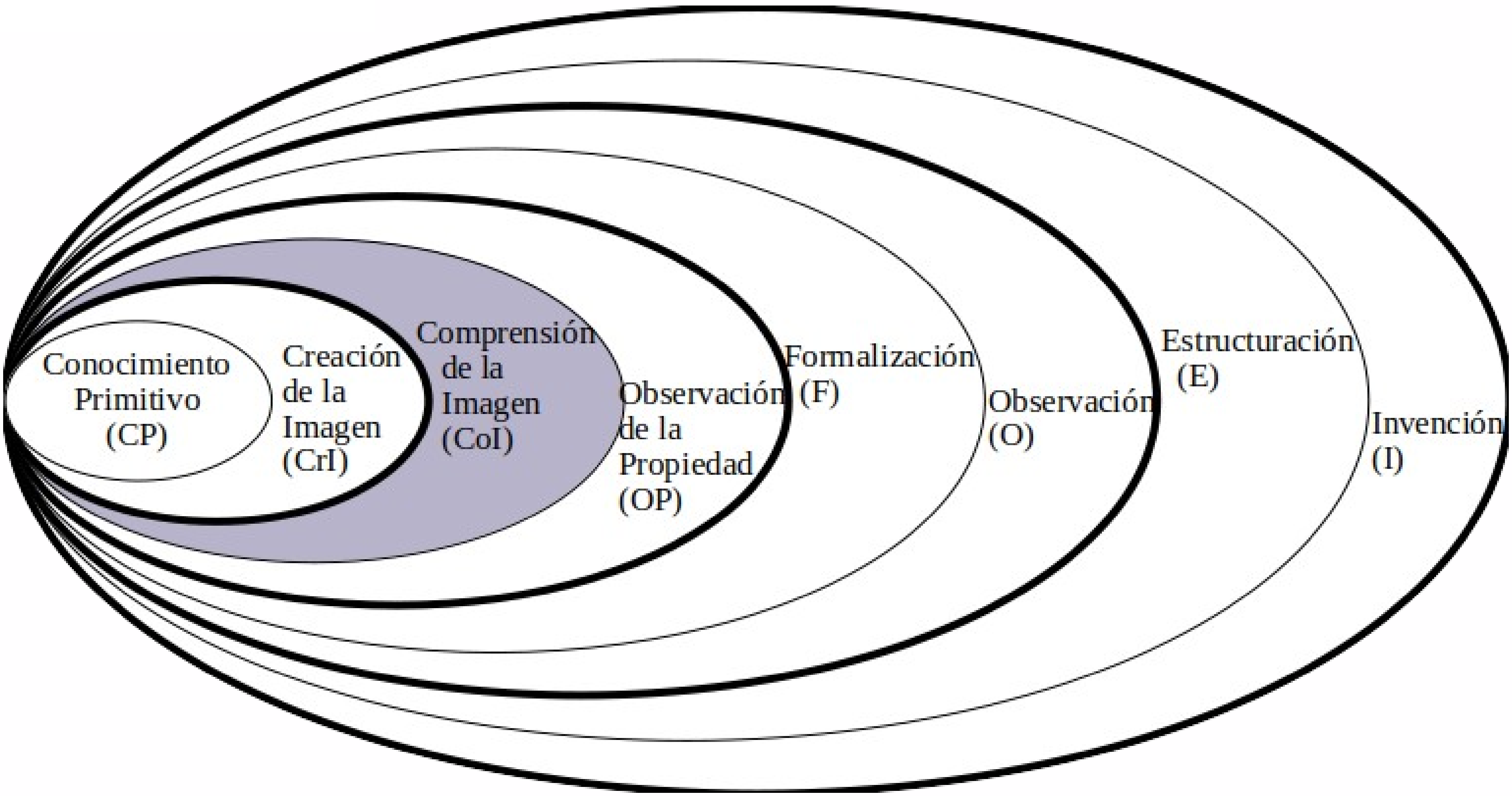


Es el nivel donde se desarrollan las conexiones entre los referentes y los símbolos, formando imágenes (no necesariamente pictóricas).

Estas imágenes no necesariamente son correctas.

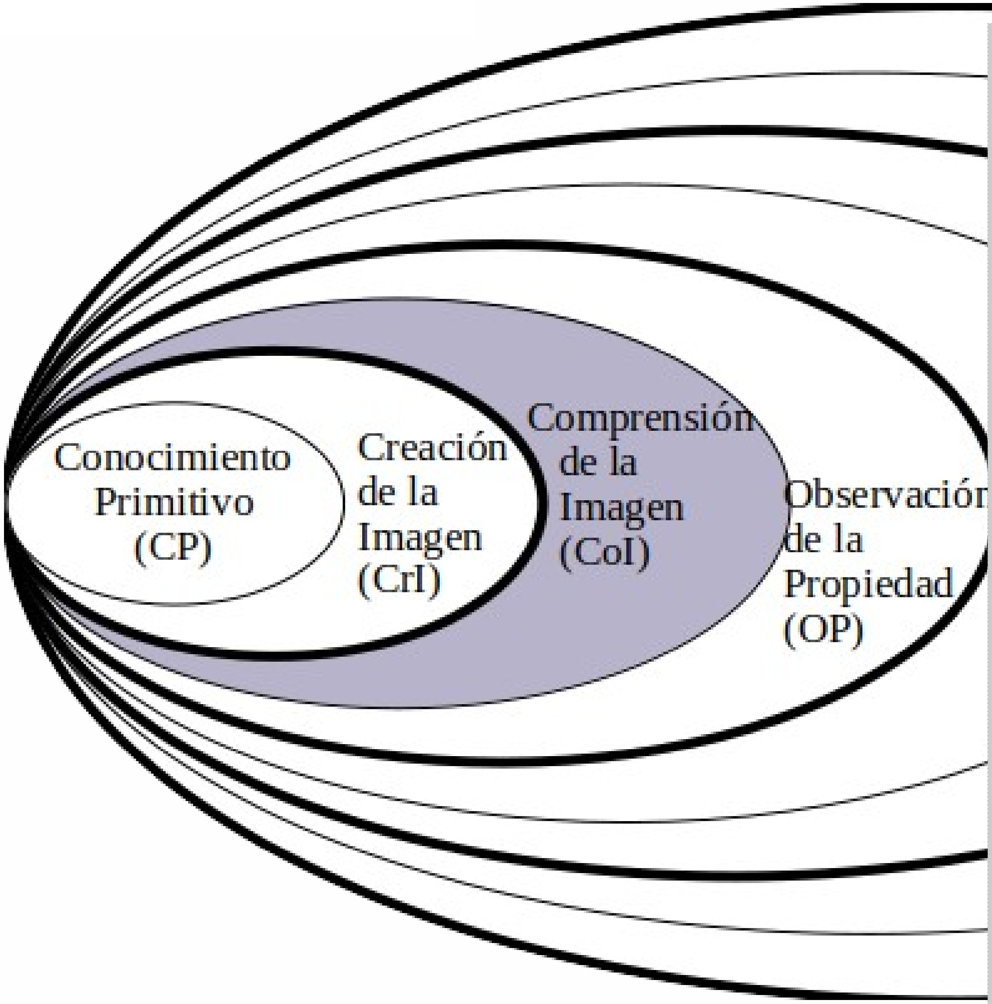
Cuando el estudiante precisa de actividades concretas para representar de algún modo el concepto matemático objeto de estudio, o bien, cuando requiere volver a leer el libro de texto o los ejemplos previos, se encuentra en este nivel.

El Modelo de Pirie y Kieren



(Pirie y Kieren,1989, 1994)

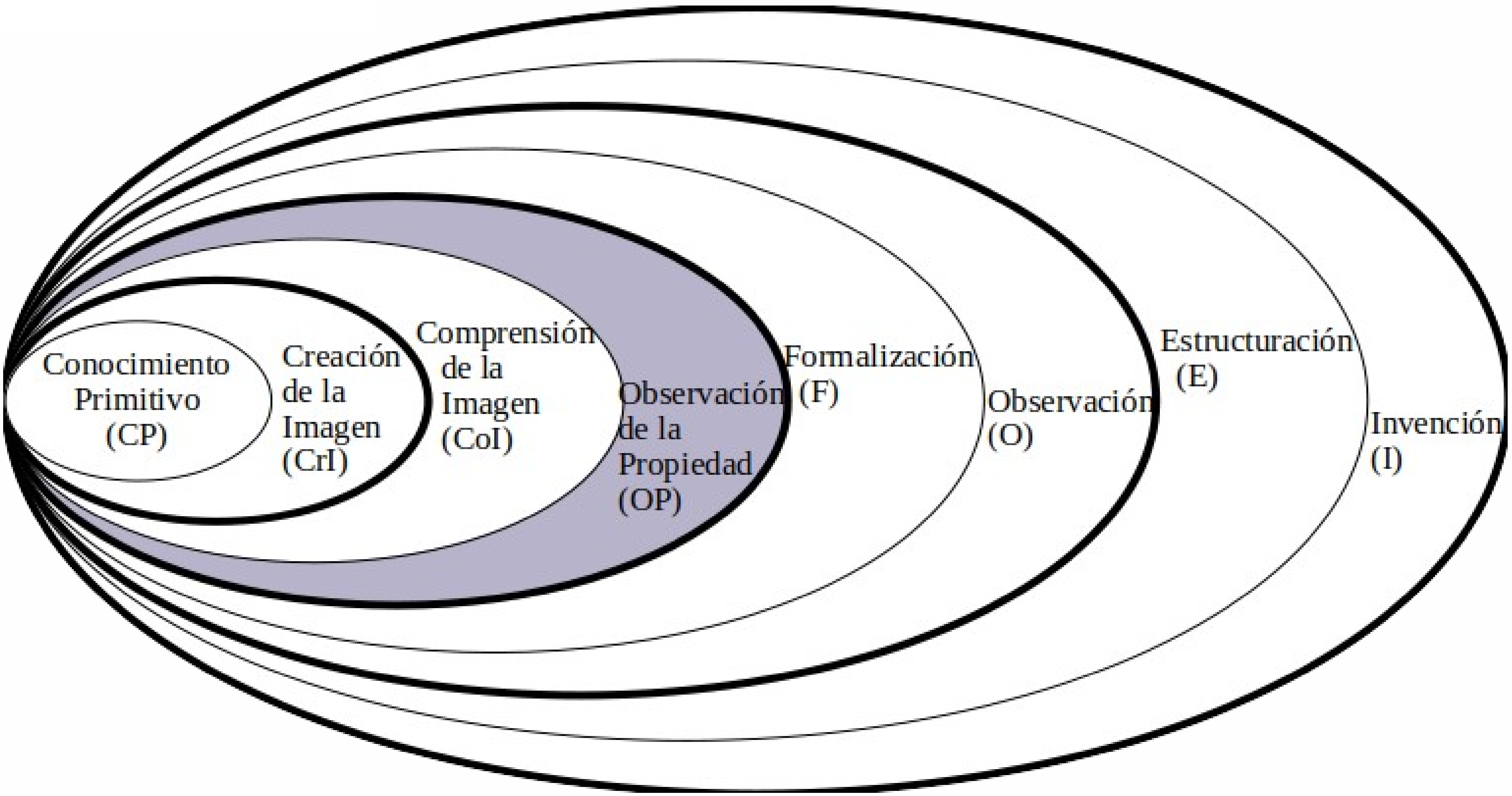
El Modelo de Pirie y Kieren



Es cuando se desarrollan y consolidan las imágenes mentales, aunque estas sean erroneas.

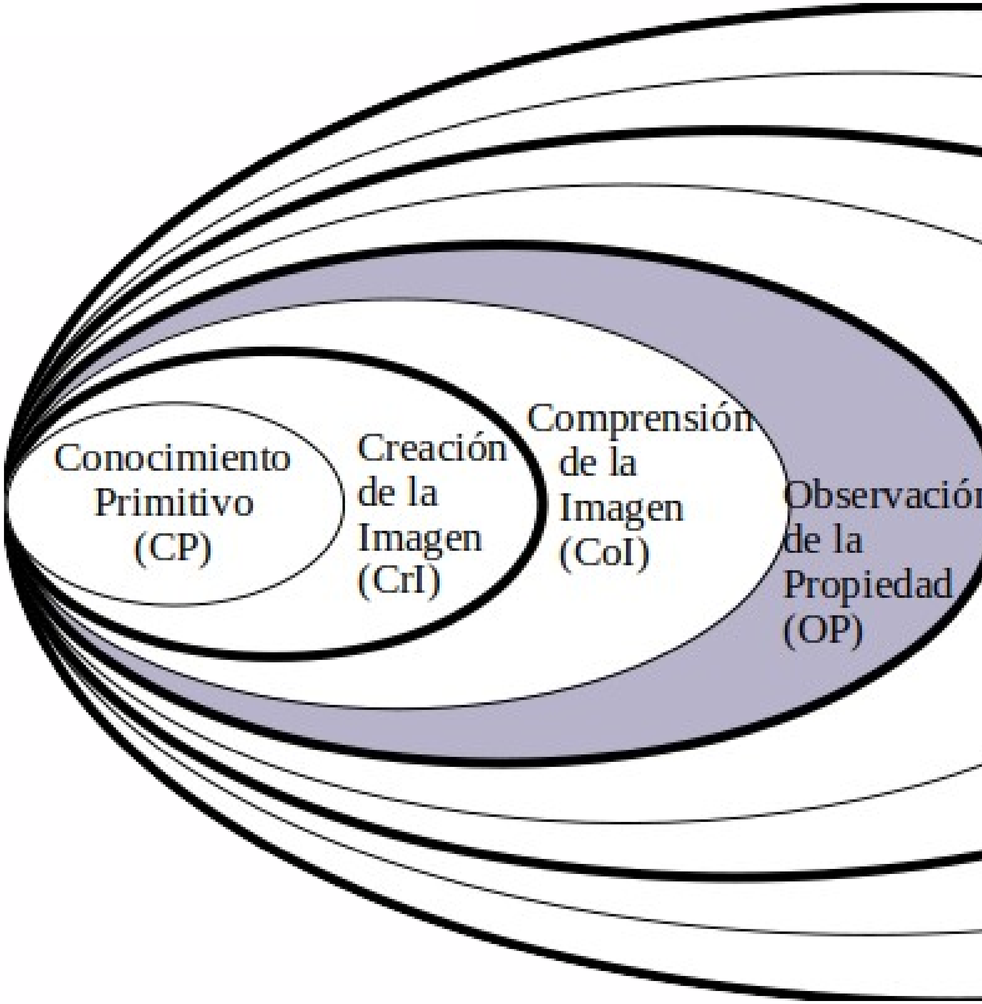
Si el alumno es capaz de utilizar una construcción mental sobre el concepto sin necesidad de realizar actividades concretas o trabajar con ejemplos particulares, el alumno se encontrará en este nivel.

El Modelo de Pirie y Kieren



(Pirie y Kieren,1989, 1994)

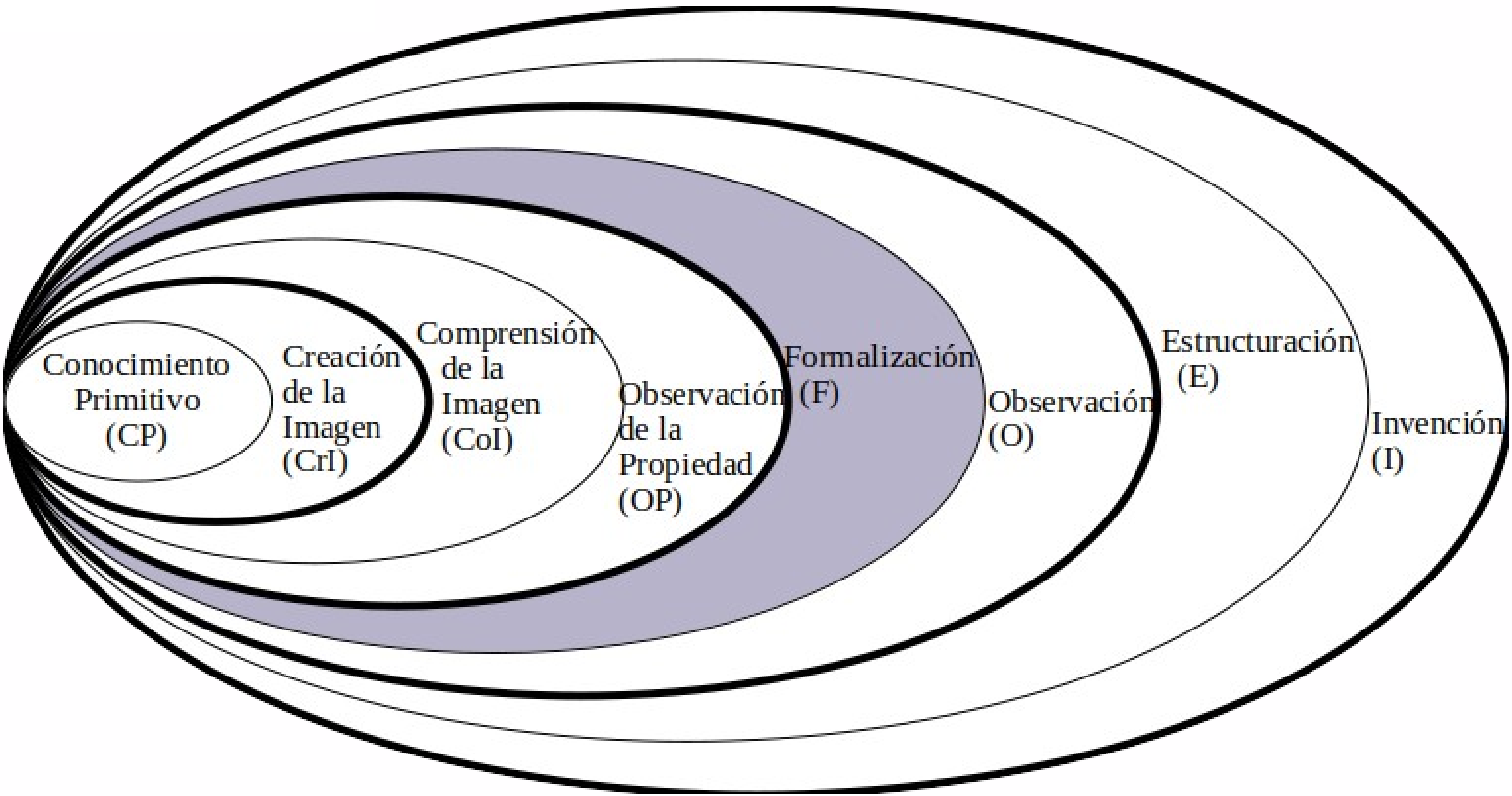
El Modelo de Pirie y Kieren



Es cuando se desarrollan las propiedades que relacionan lo que Vinner (1983) llama Imagen de Concepto.

Es decir que se alcanza este nivel cuando el estudiante trabaja con las imágenes que ya posee y es capaz de reflexionar buscando propiedades y tratando de generalizarlas.

El Modelo de Pirie y Kieren

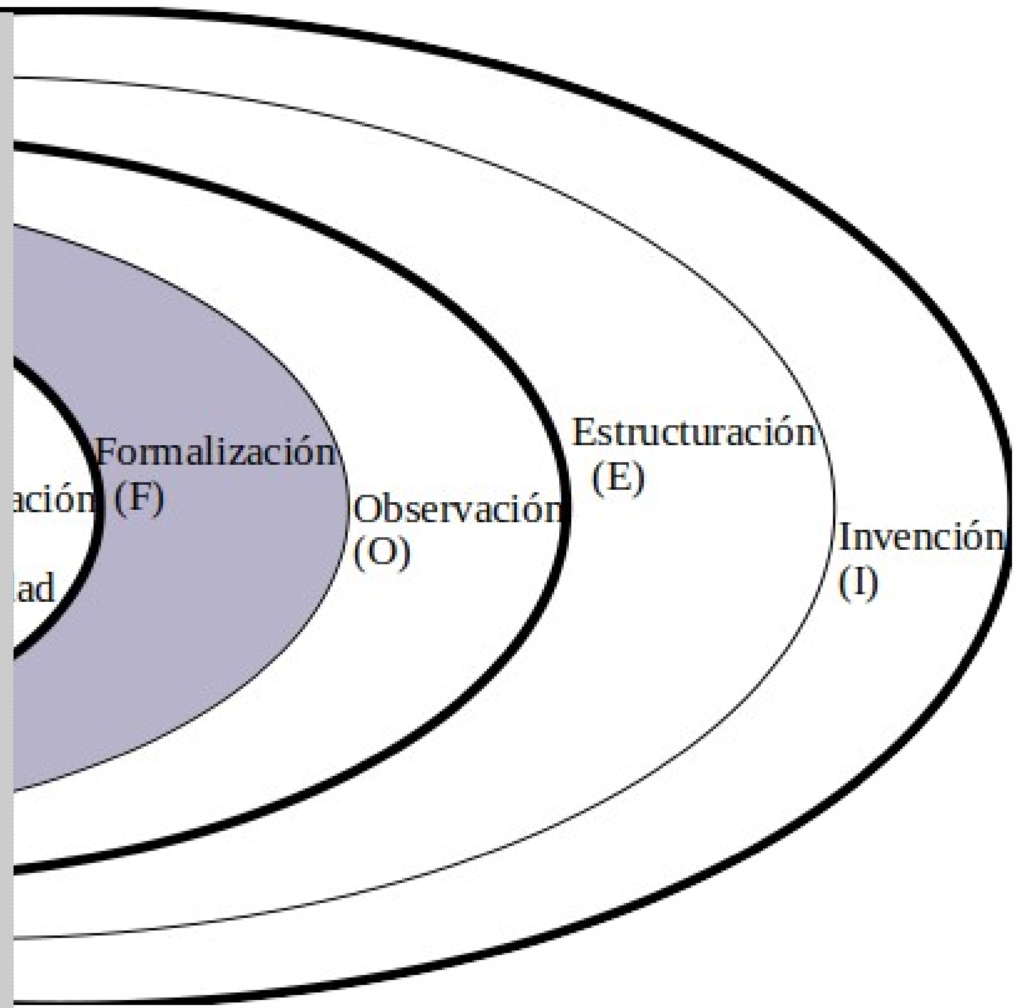


(Pirie y Kieren,1989, 1994)

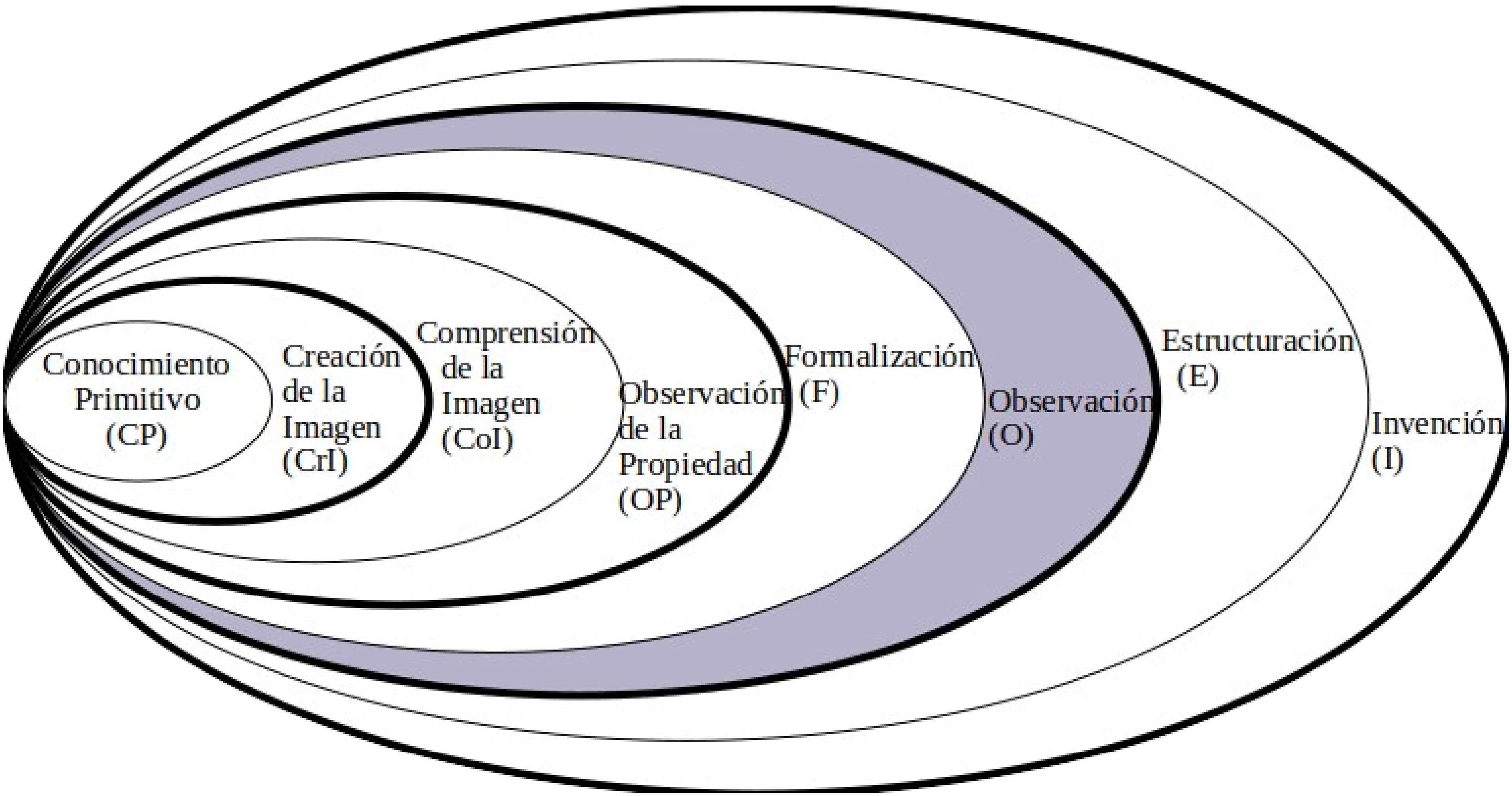
El Modelo de Pirie y Kieren

Es cuando se forman propiamente las Definiciones de Concepto de Vinner (1983), donde las definiciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada, aunque el lenguaje utilizado no tiene necesariamente que ser un lenguaje matemático formal.

Es cuando el alumno tiene la capacidad de pensar sobre las propiedades ya generalizadas y trabajar con el concepto como objeto formal, sin hacer referencia a una acción o imagen particular.



El Modelo de Pirie y Kieren



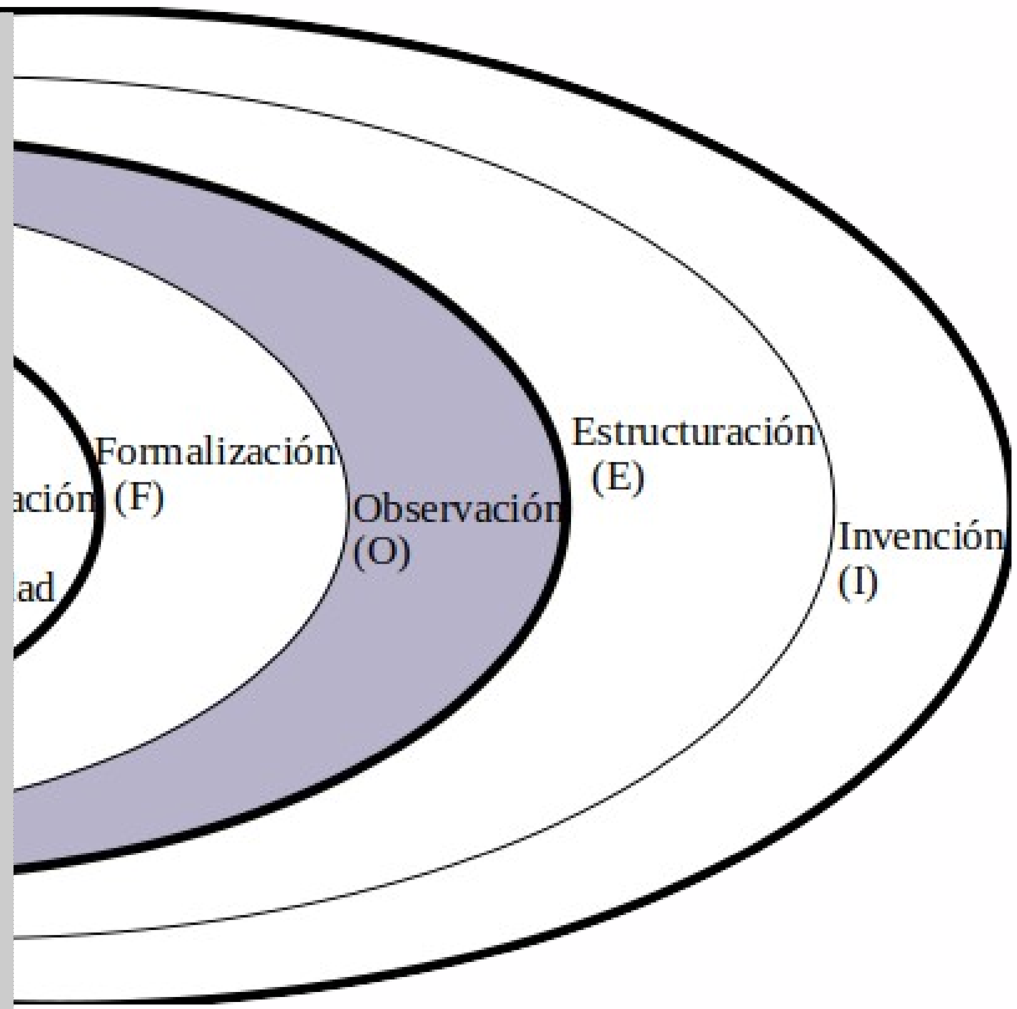
(Pirie y Kieren,1989, 1994)

El Modelo de Pirie y Kieren

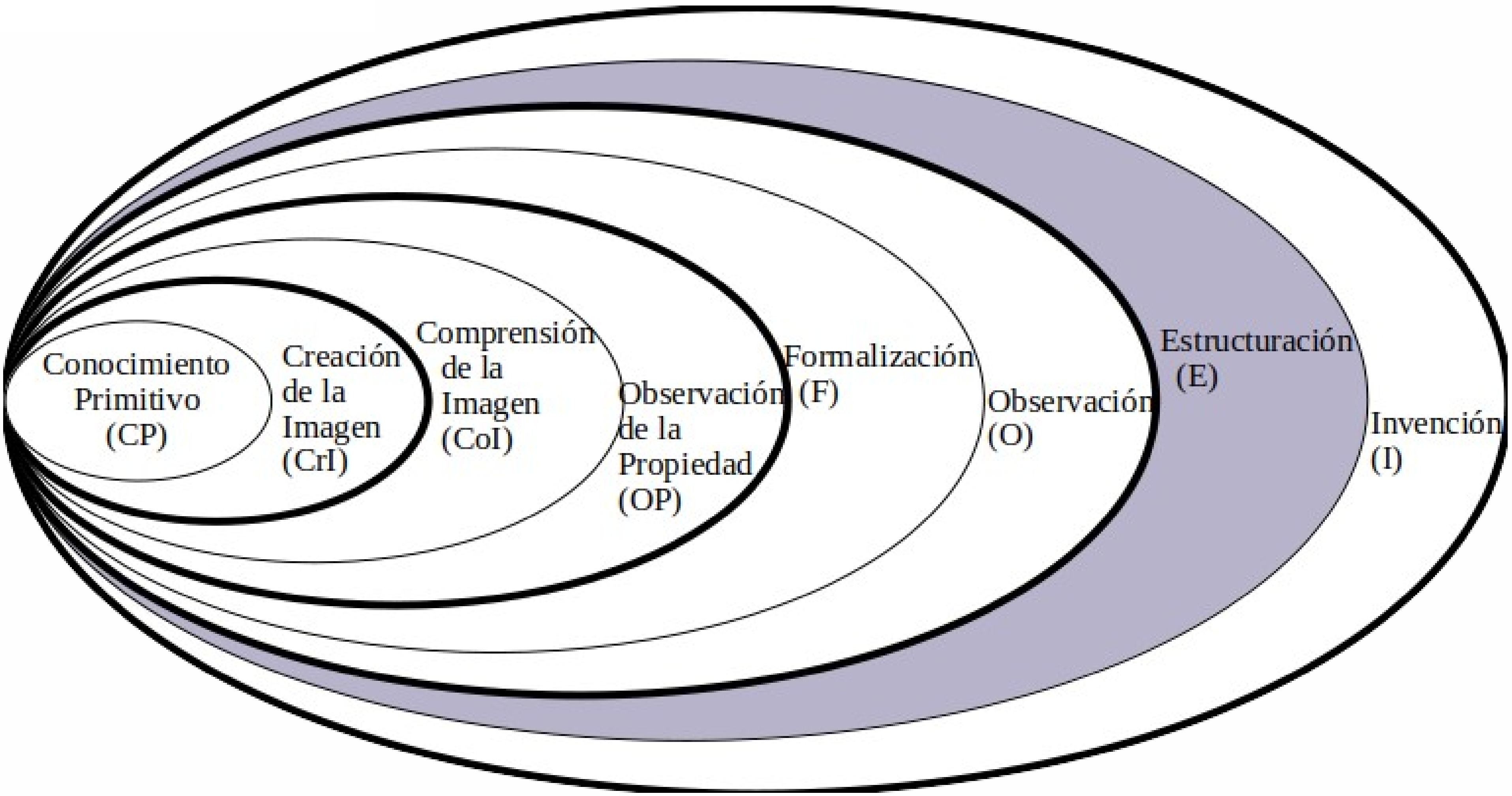
Es el nivel en el que el estudiante es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales y reconocer las ramificaciones de los procesos de pensamiento.

Además es cuando puede combinar las definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes, las conexiones y los medios para cruzar en tales conexiones.

Es cuando puede entender una demostración por sí mismo.



El Modelo de Pirie y Kieren



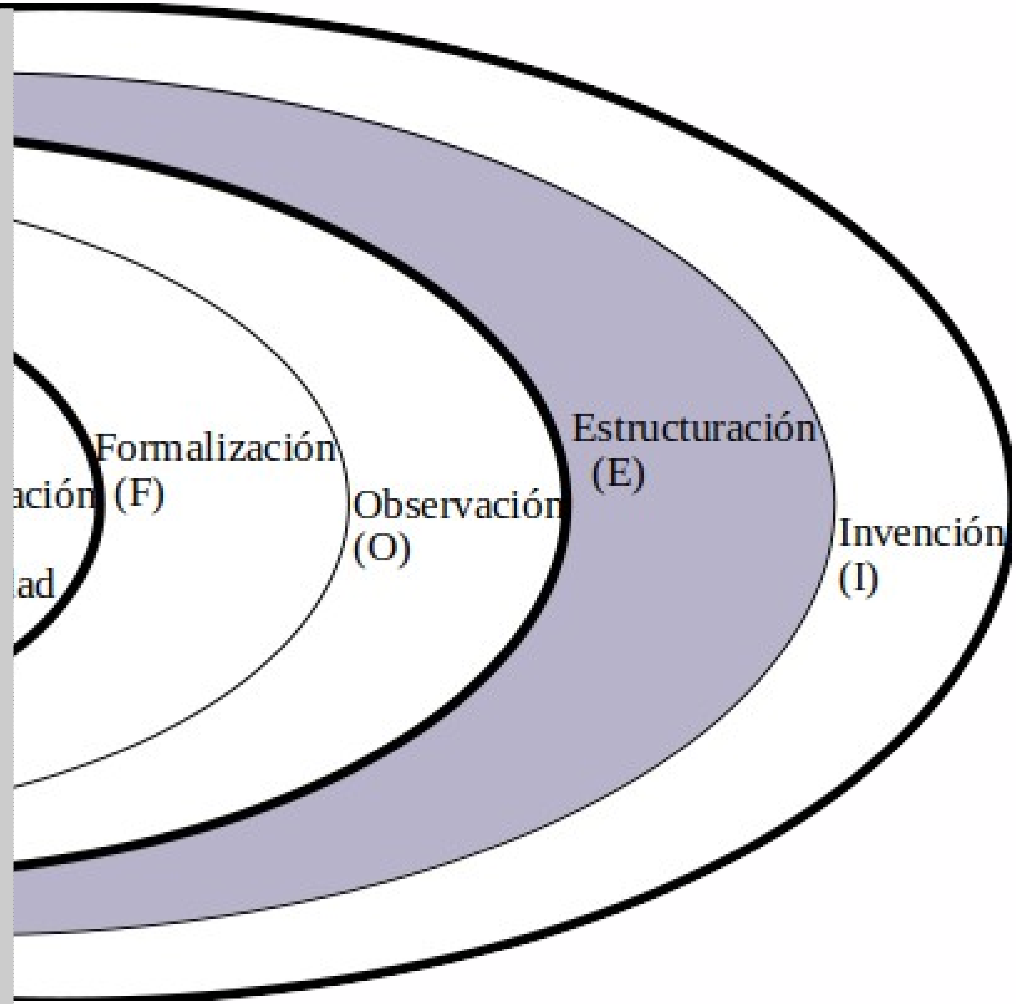
(Pirie y Kieren,1989, 1994)

El Modelo de Pirie y Kieren

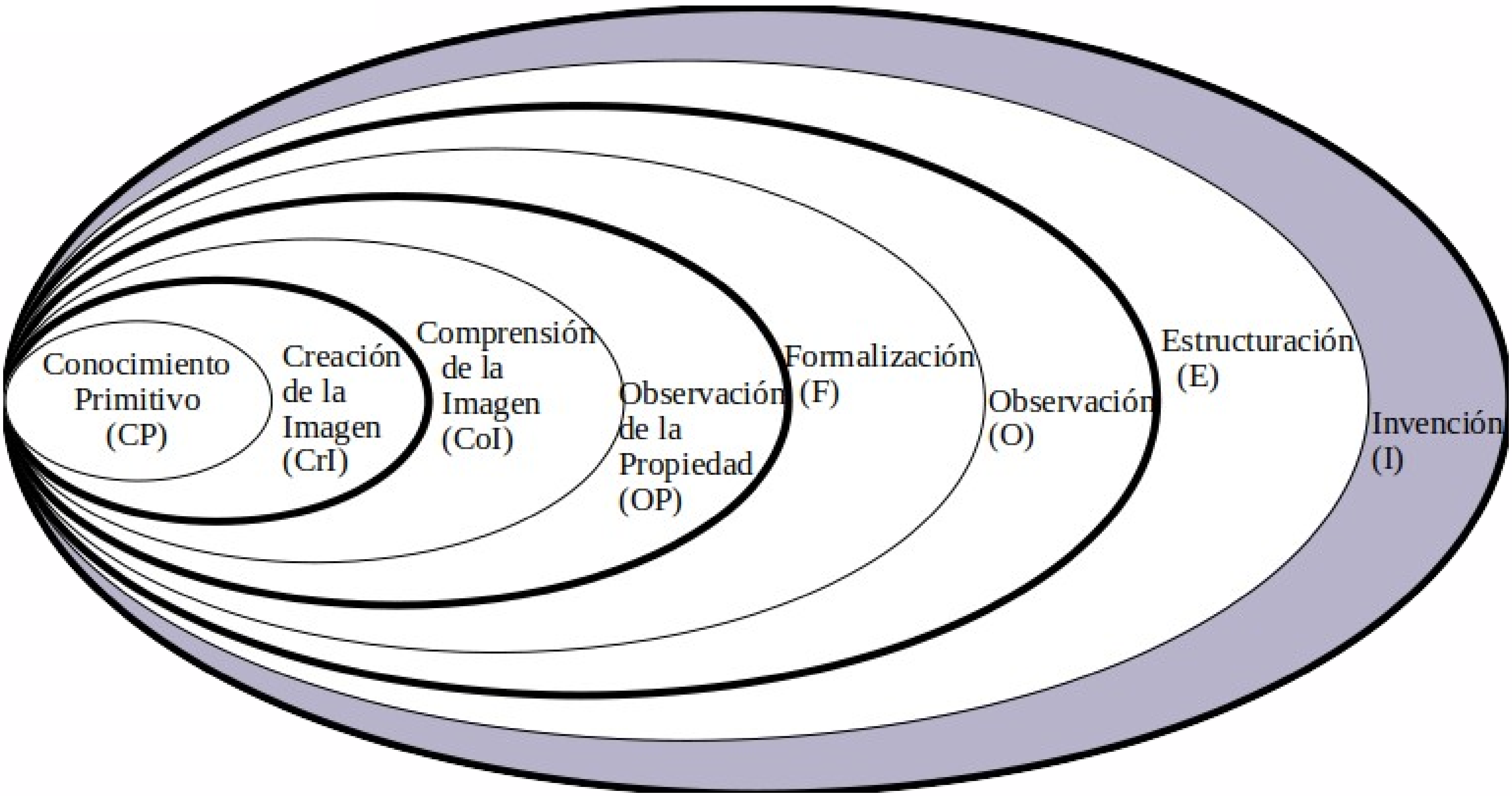
Es cuando el estudiante puede explicar propiedades mediante un sistema axiomático.

En este momento el estudiante es capaz de concebir las demostraciones de las propiedades asociadas al concepto.

La comprensión «completa» está en este nivel.



El Modelo de Pirie y Kieren



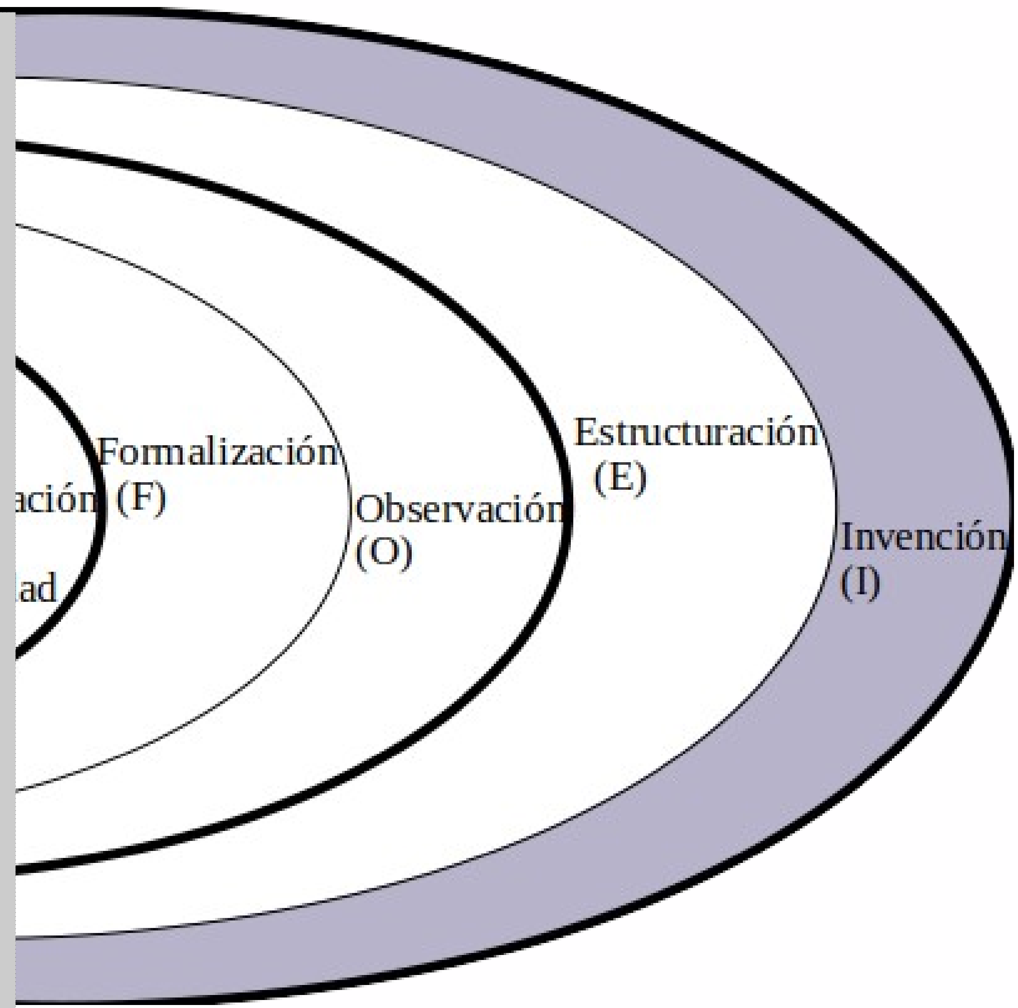
(Pirie y Kieren,1989, 1994)

El Modelo de Pirie y Kieren

Es el nivel en el que el alumno tiene la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y puede crear preguntas totalmente nuevas que tendrían como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

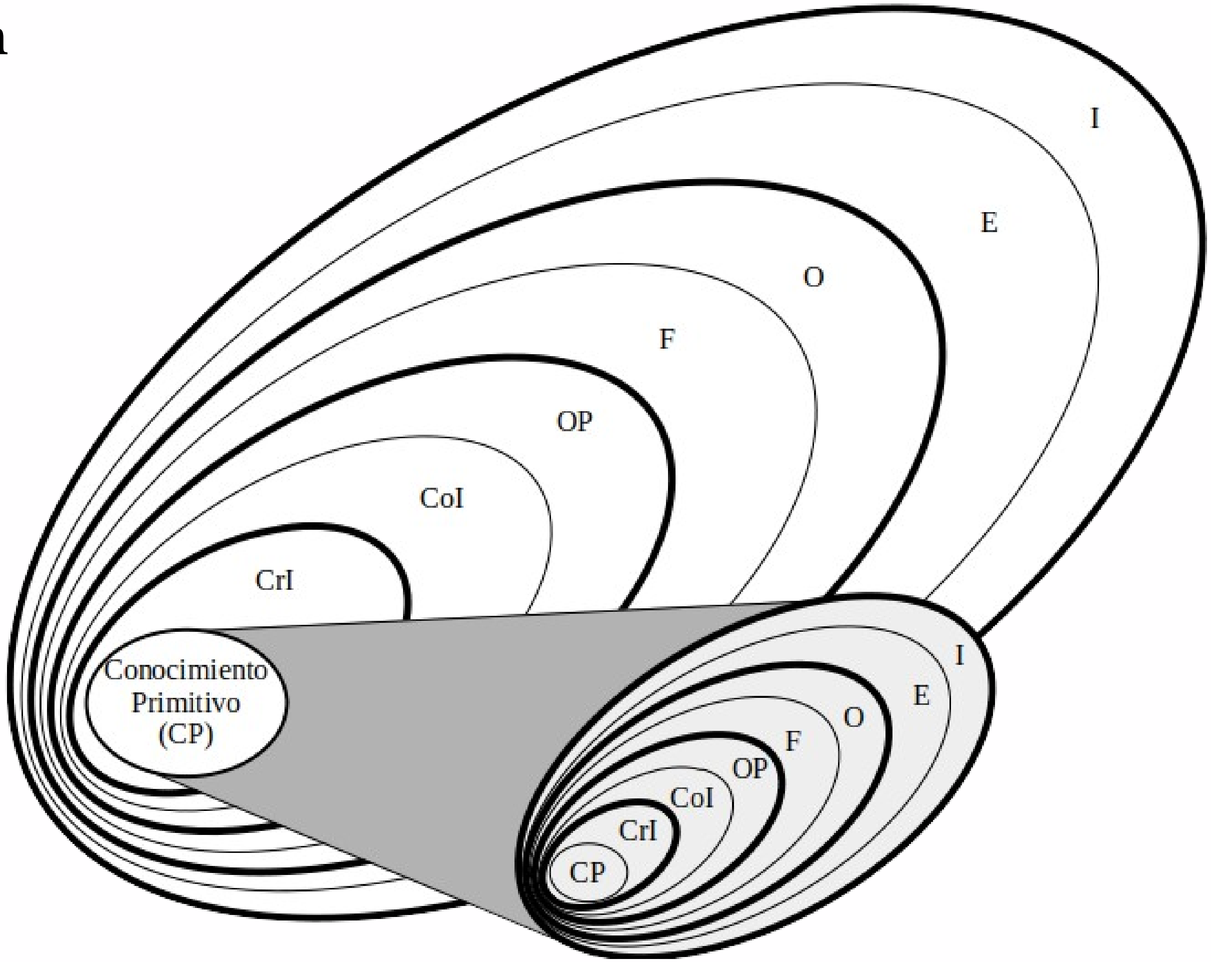
Es decir, cuando el alumno es capaz de preguntarse:

¿qué pasaría si...?



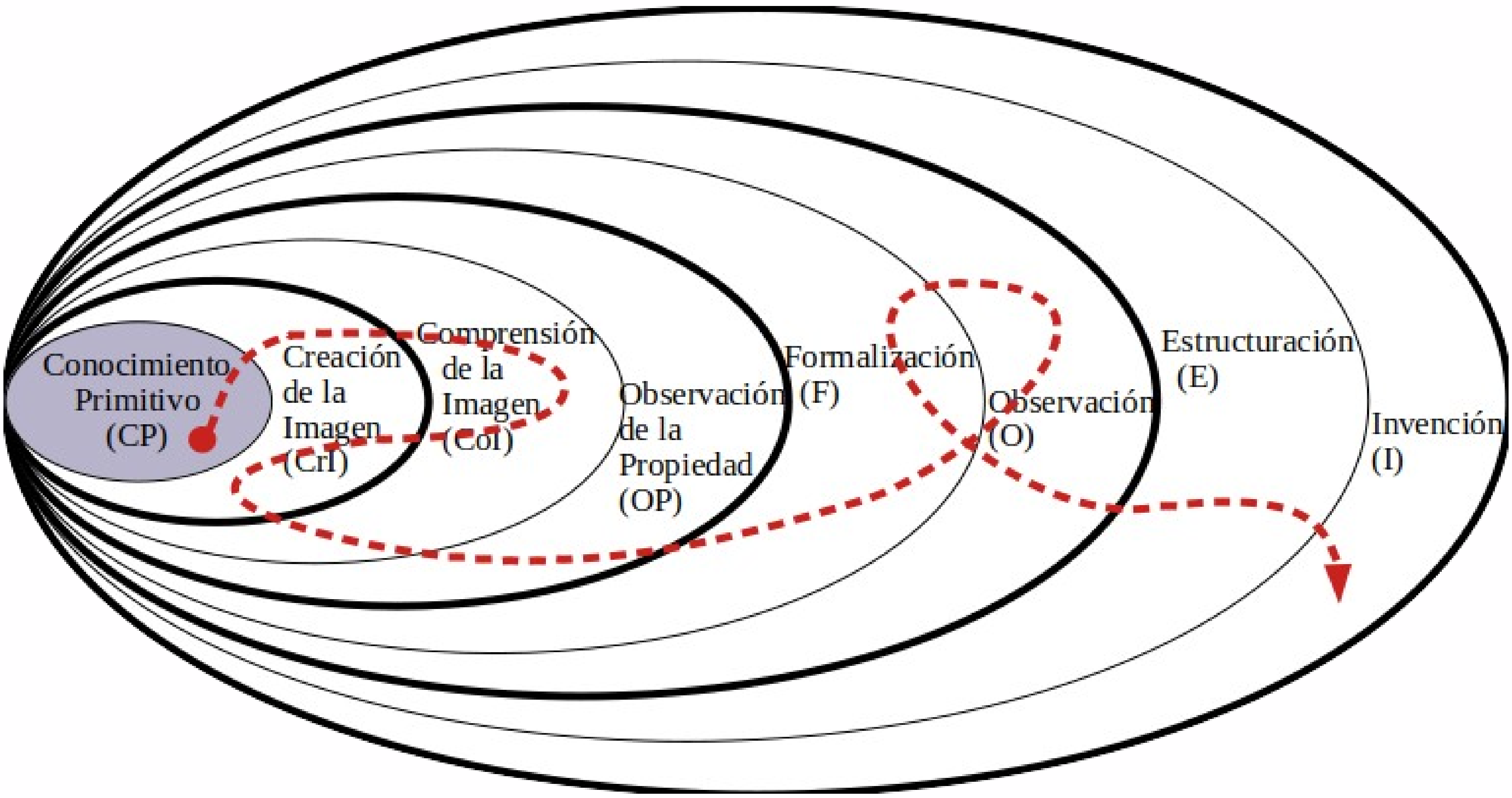
El Modelo de Pirie y Kieren

- Este es un modelo de **naturaleza fractal**, ya que los niveles externos crecen en **forma recursiva** desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite y retiene los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos.

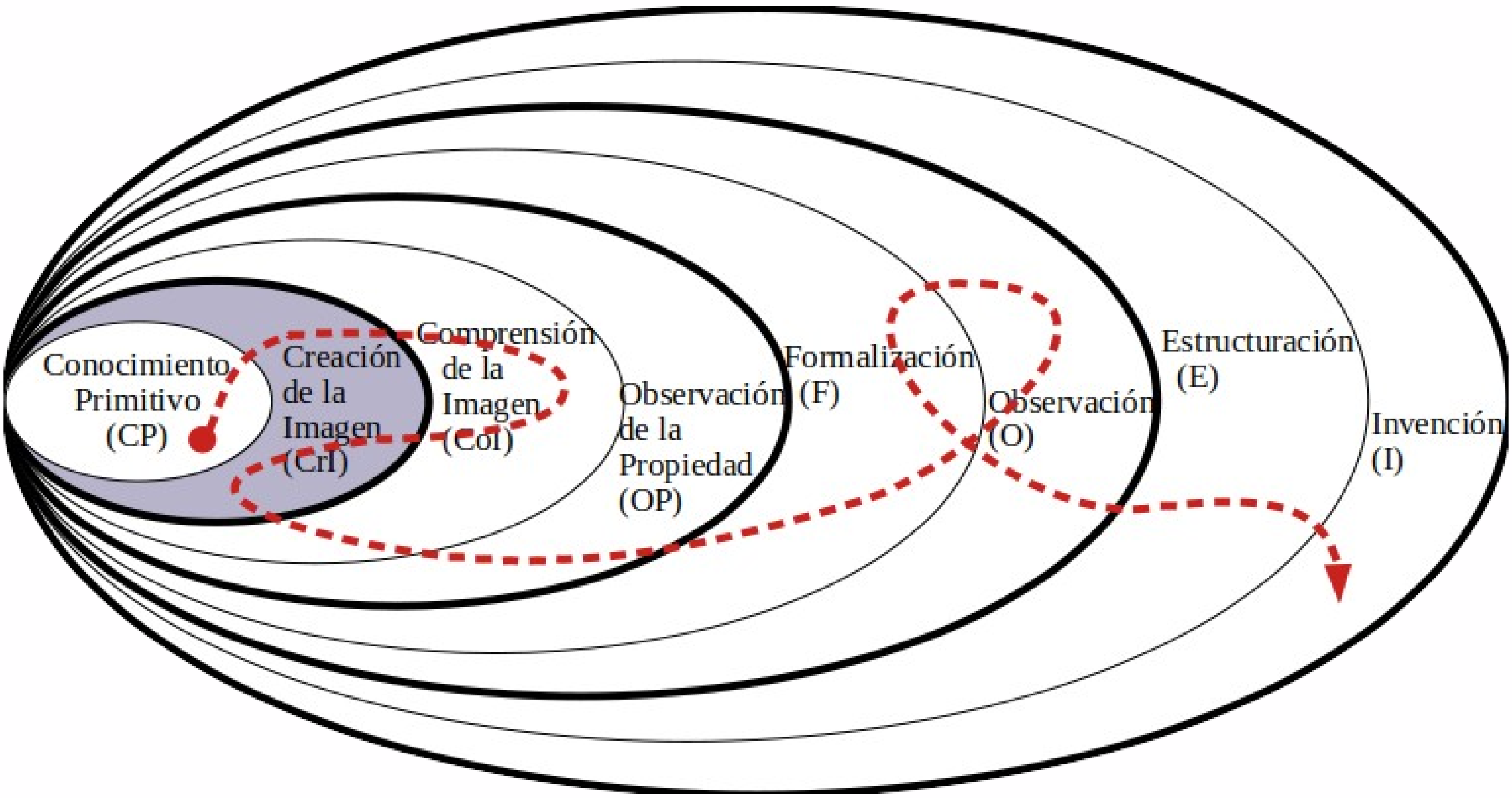


(Pirie y Kieren, 1994)

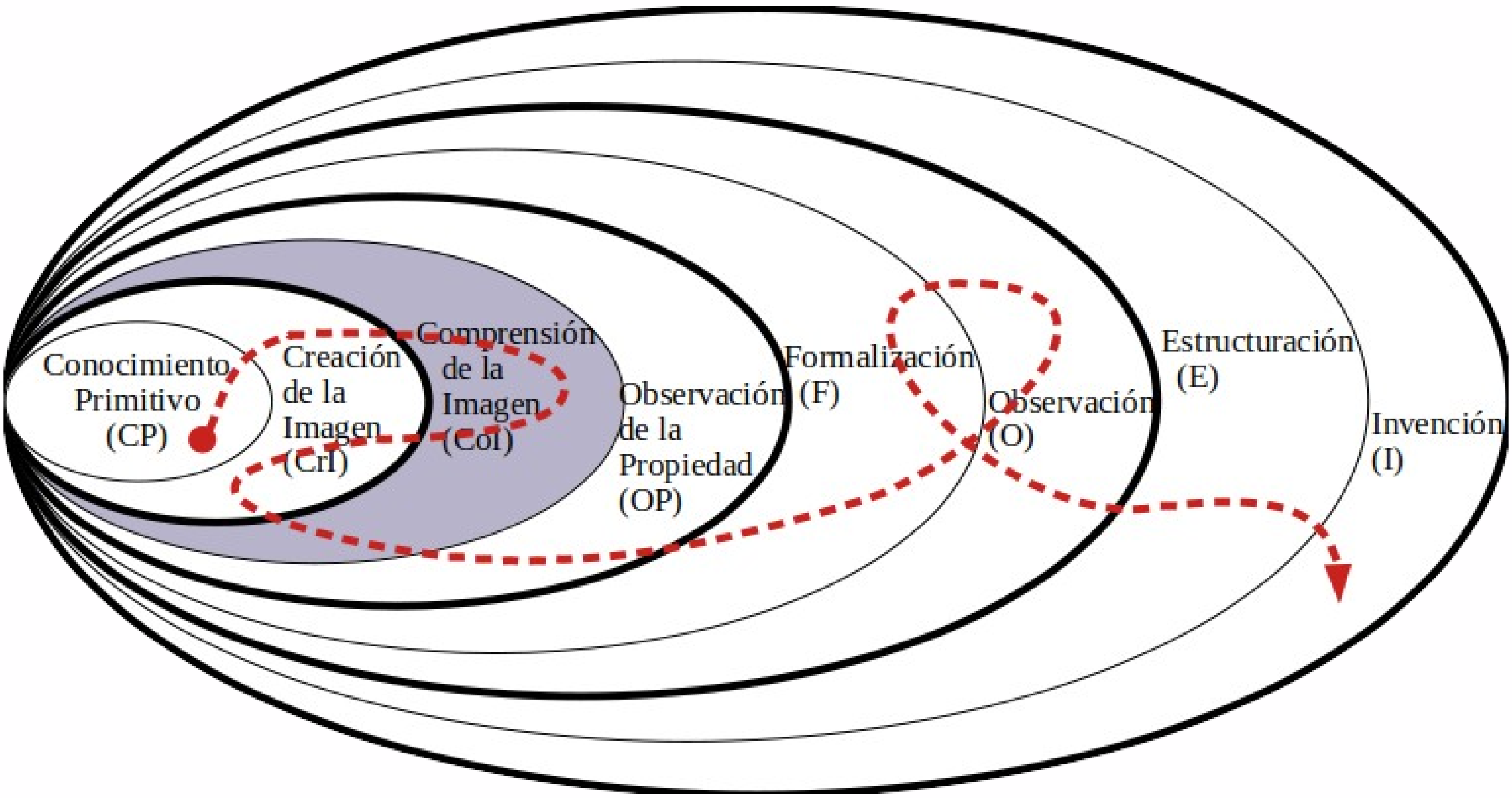
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



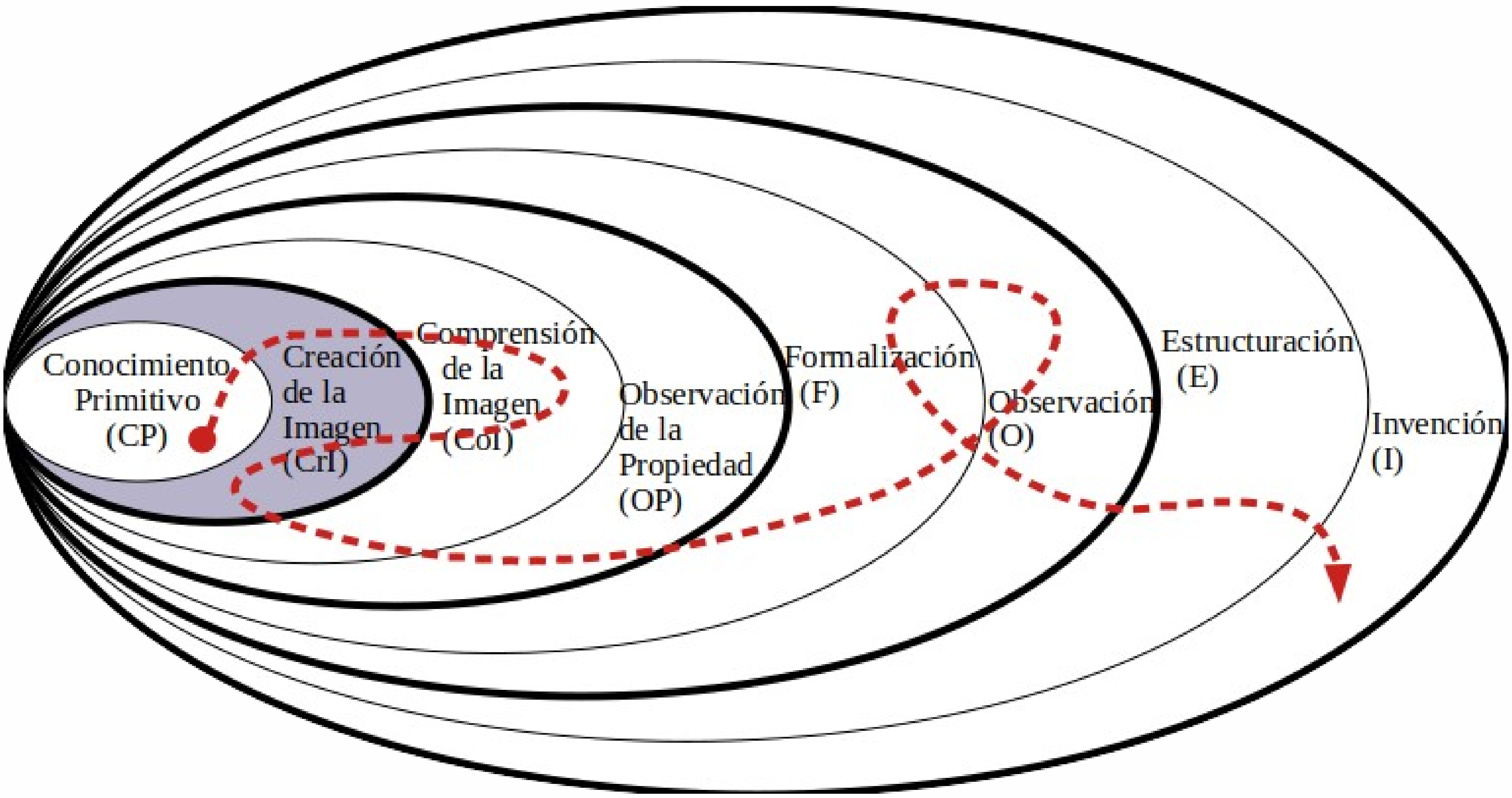
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



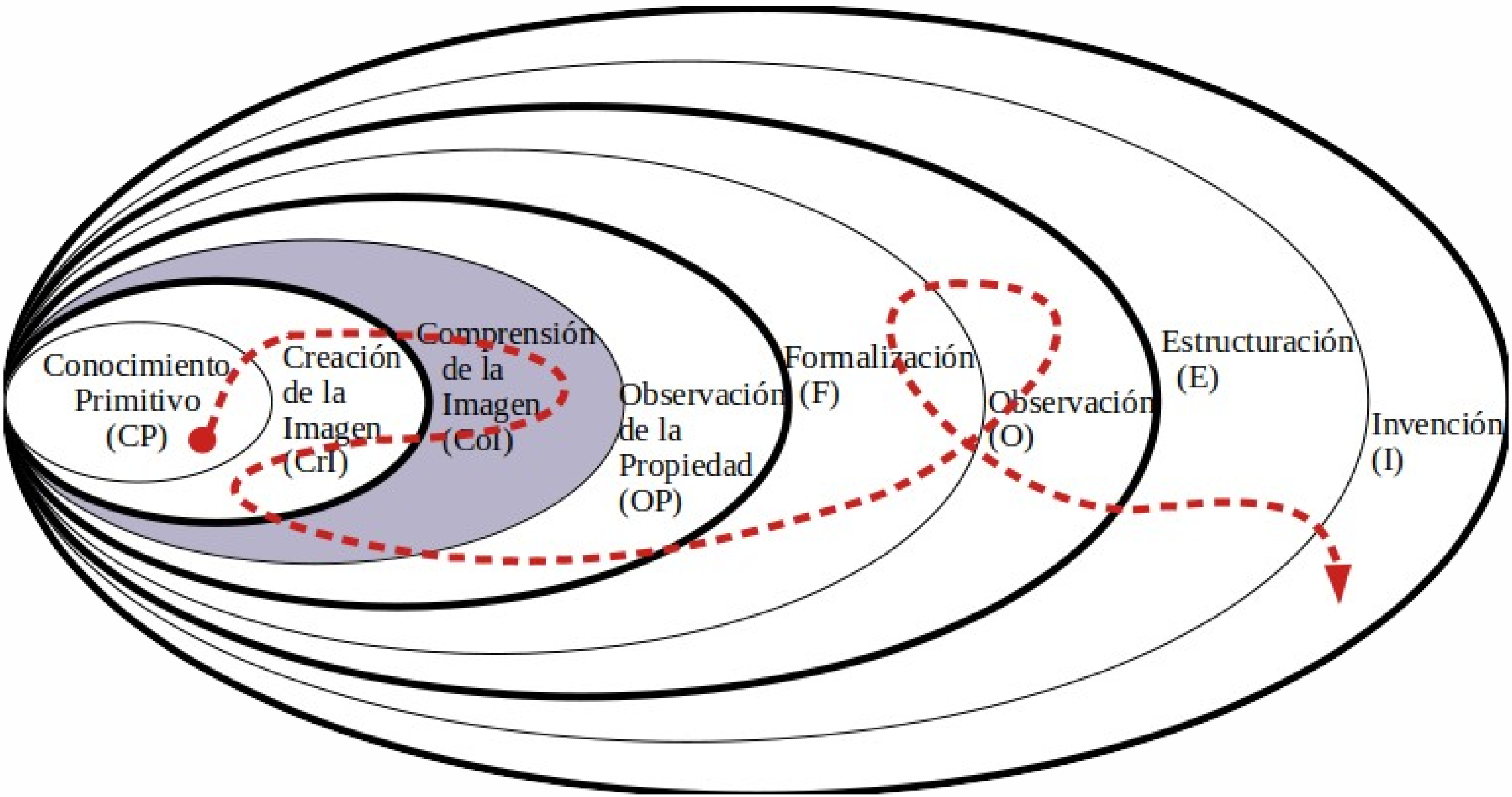
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



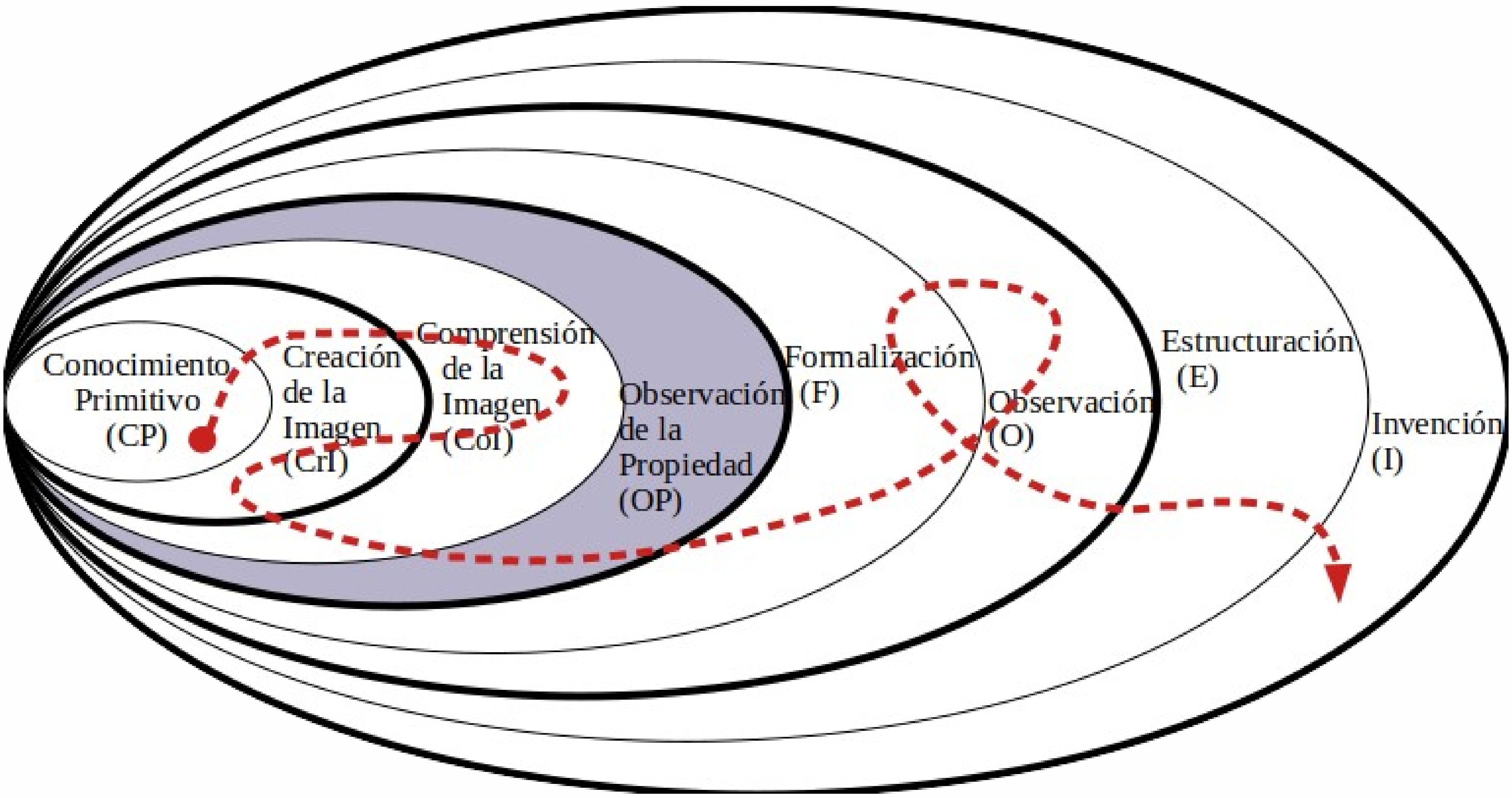
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



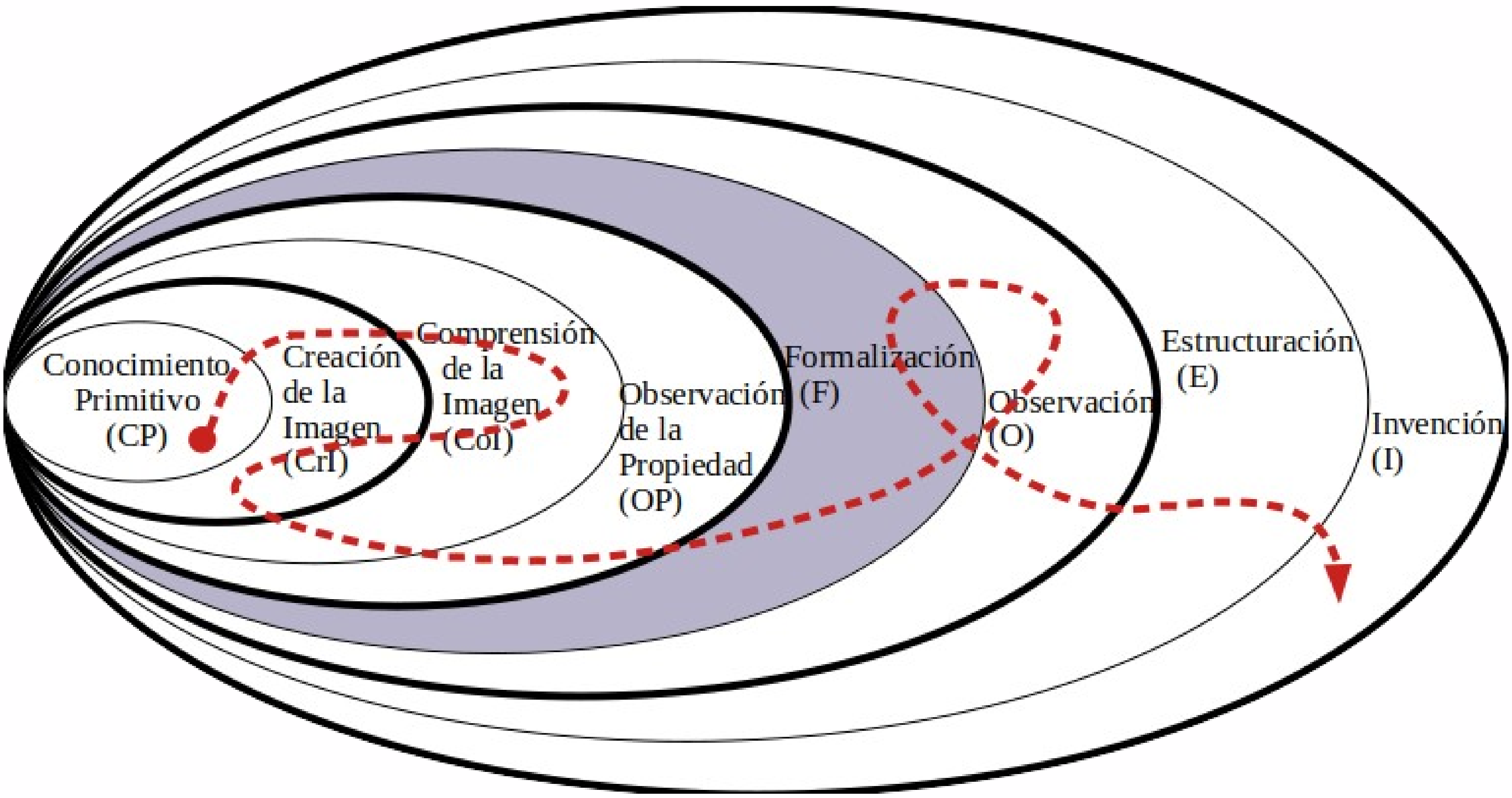
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



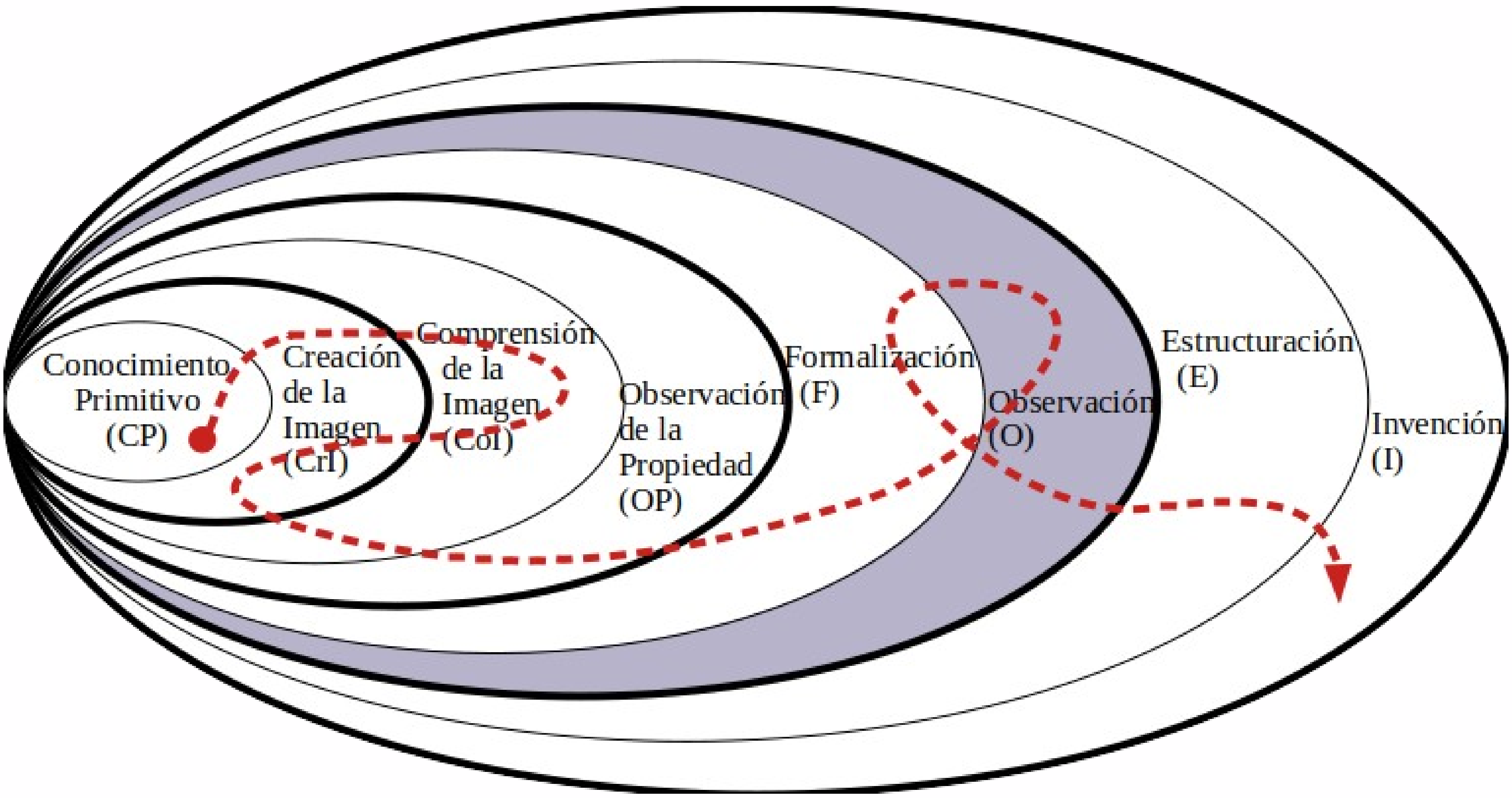
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



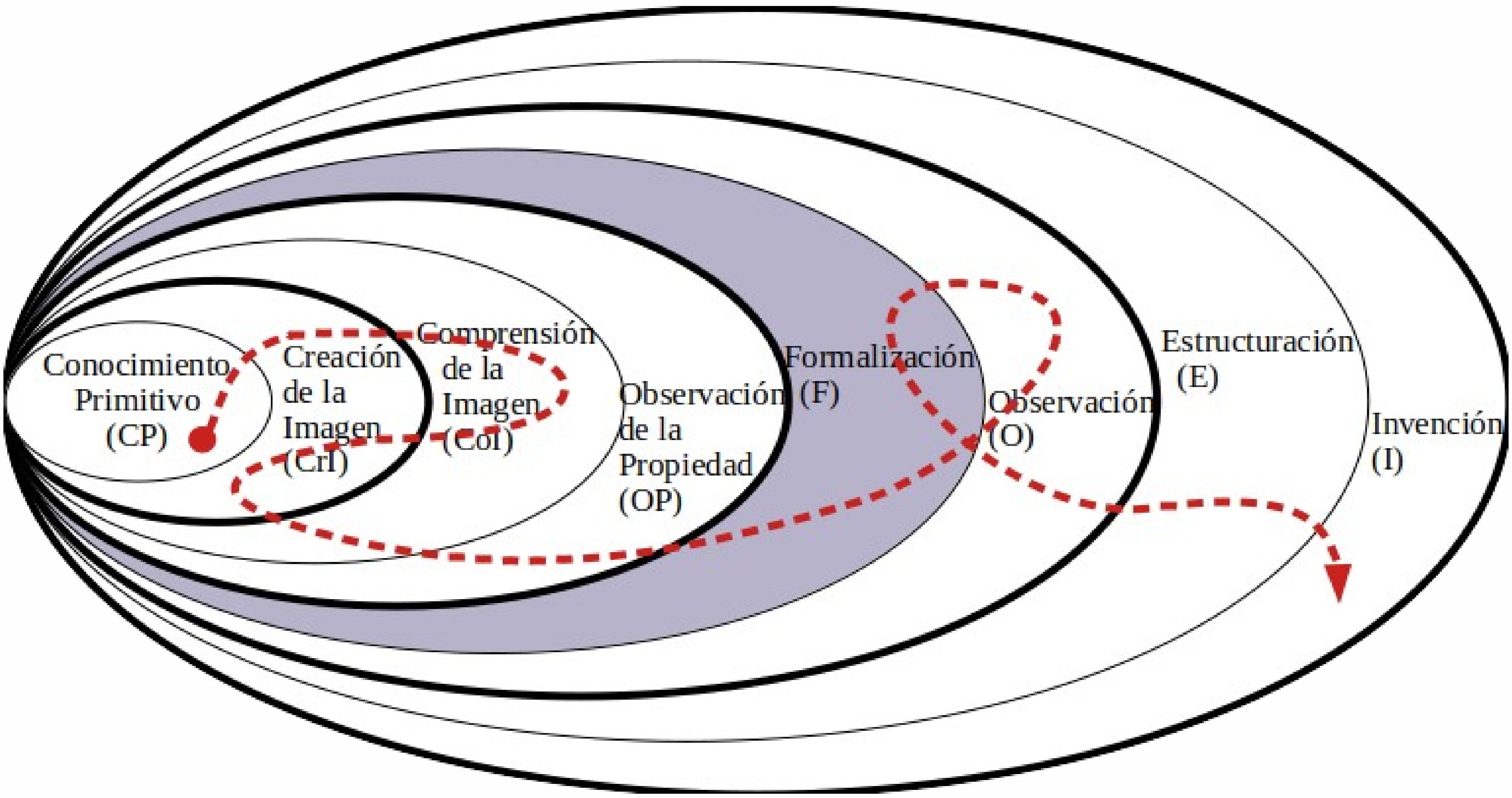
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



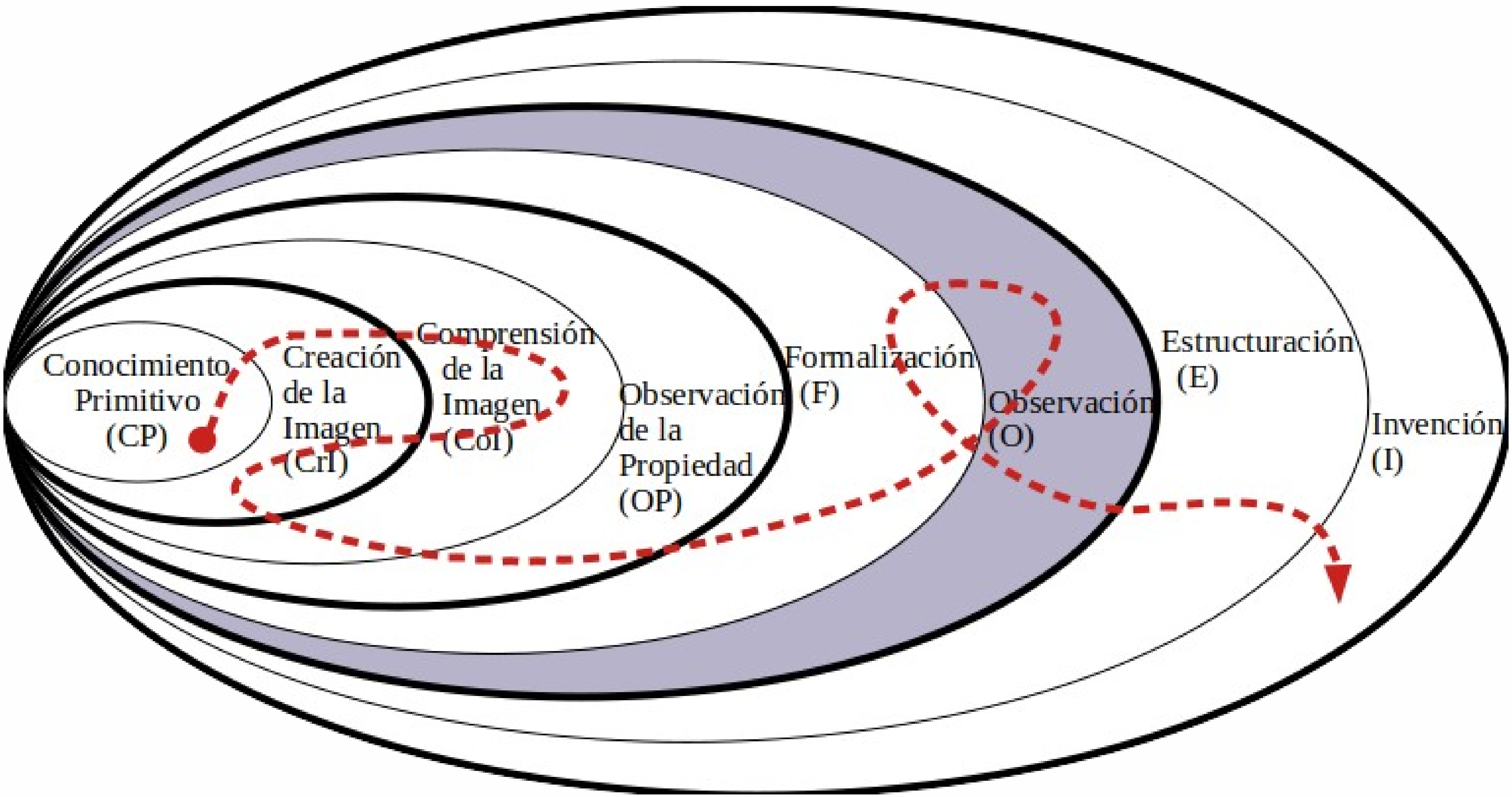
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



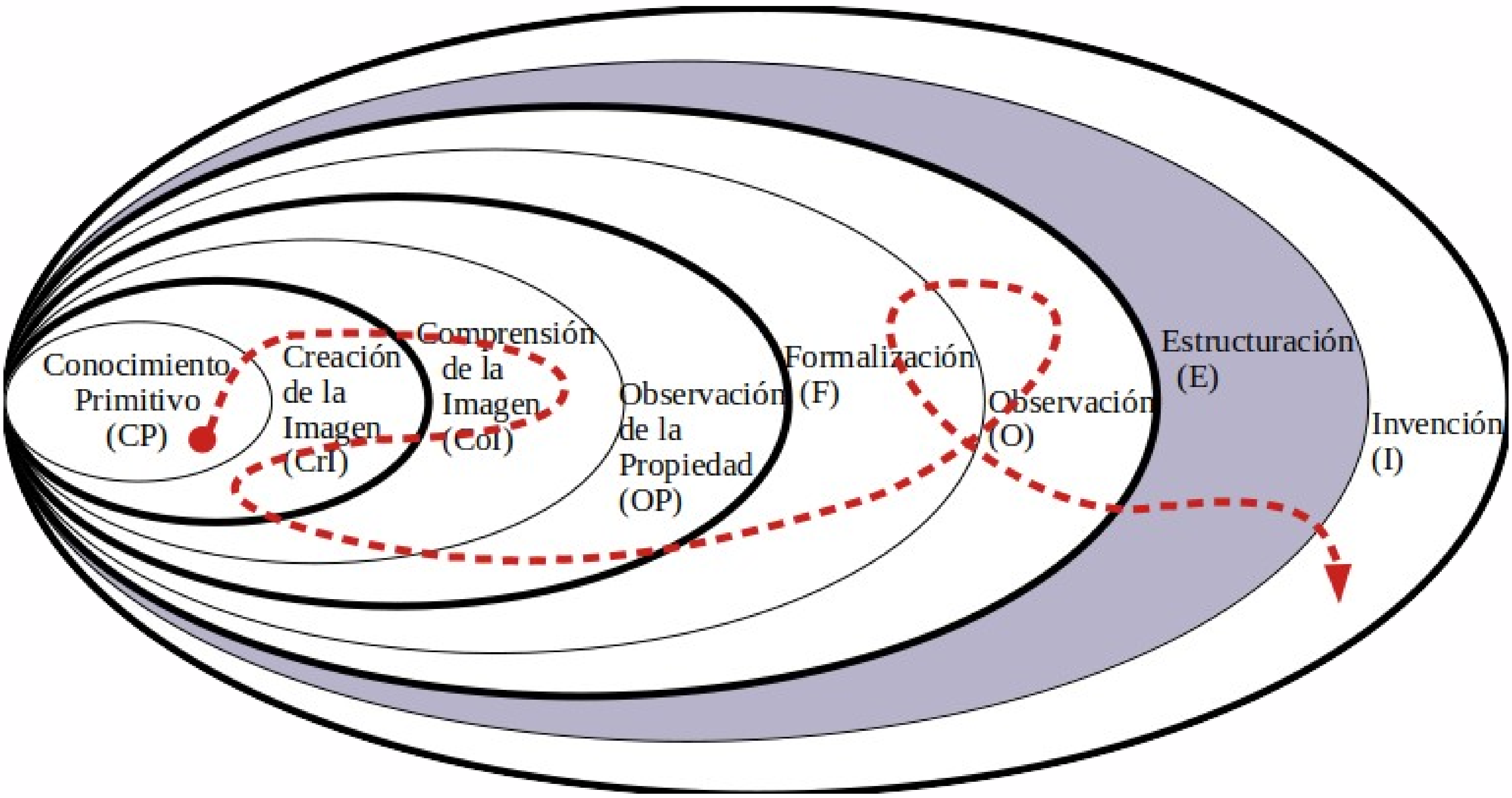
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



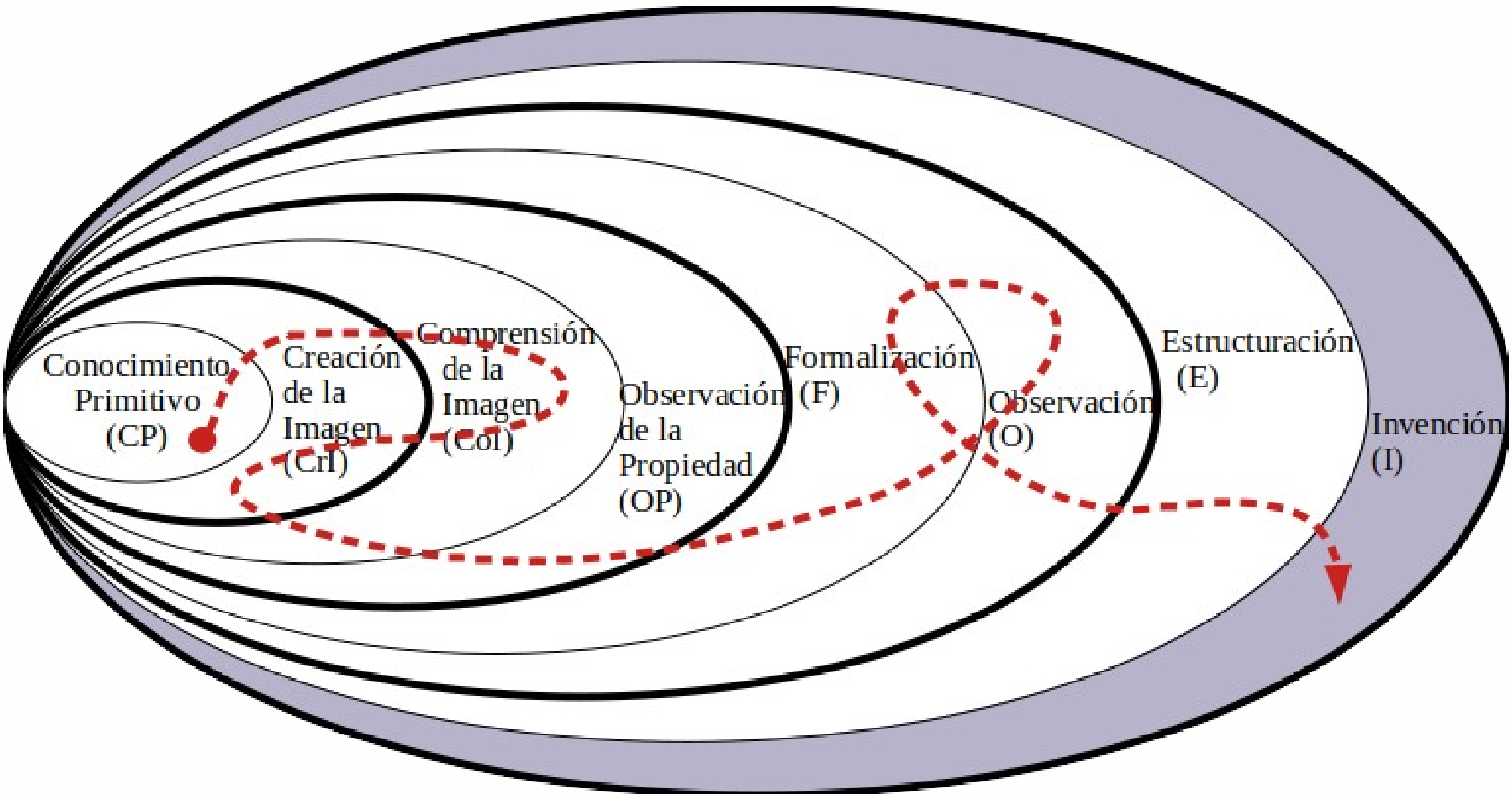
Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»

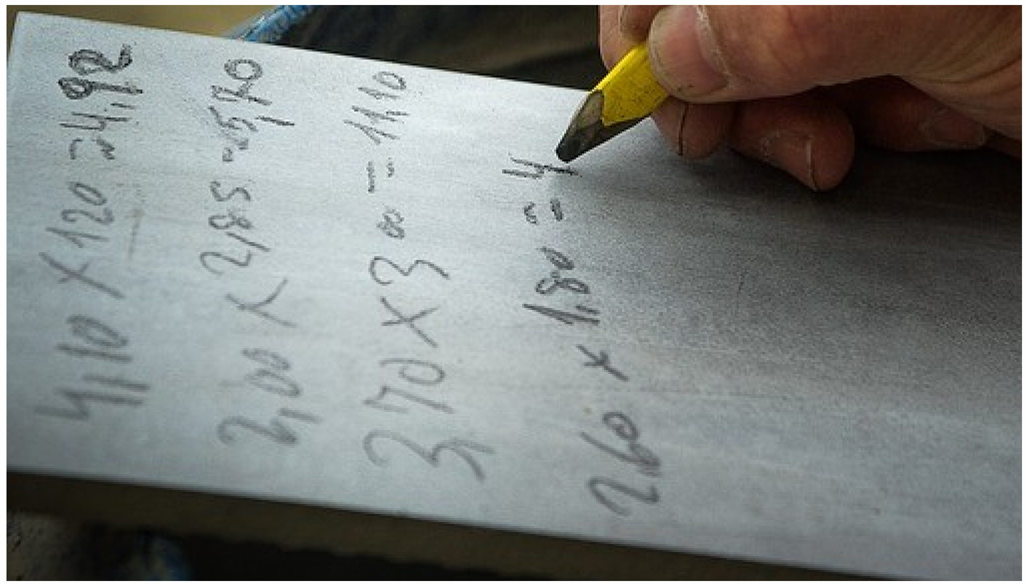


Marco Teórico – El proceso de «Redoblado»



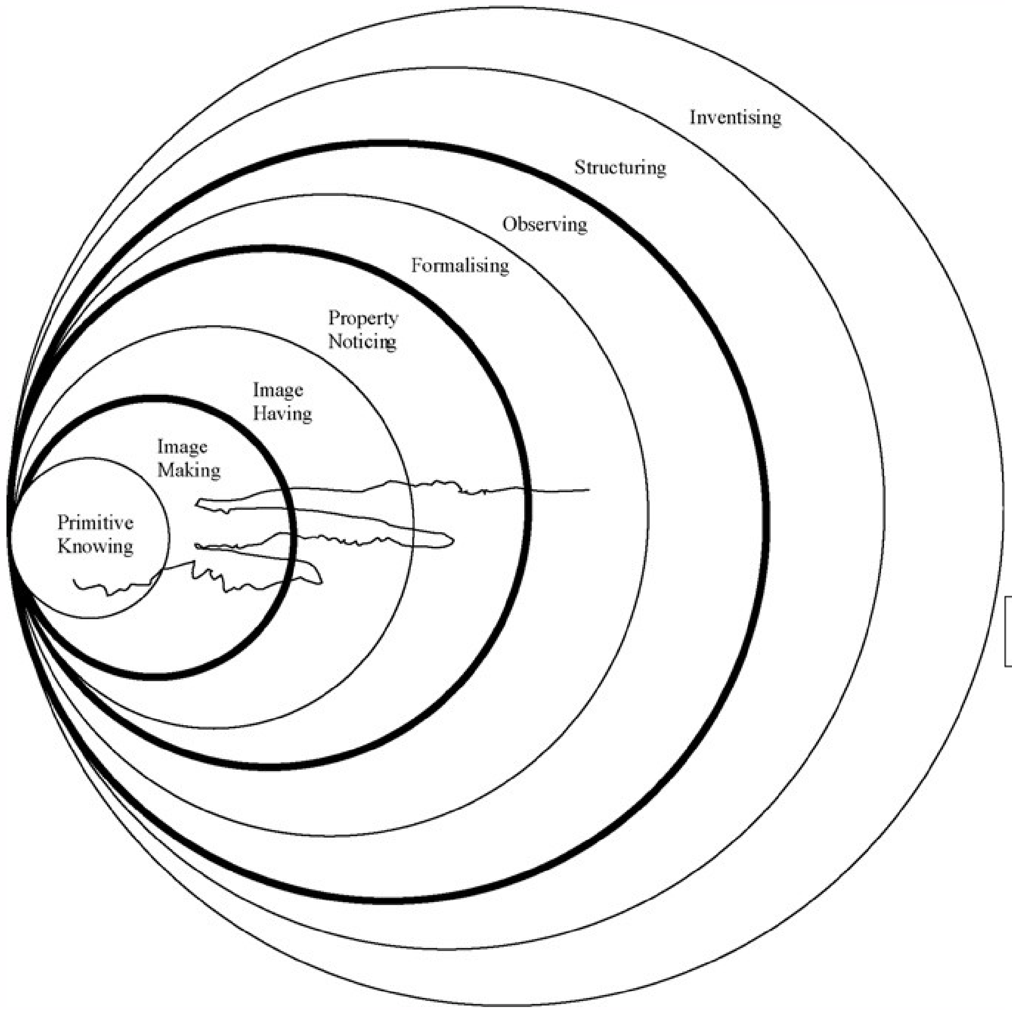
Ejemplos de uso del modelo de Pirie y Kieren en la investigación de alguno conceptos en Didáctica de la Matemática

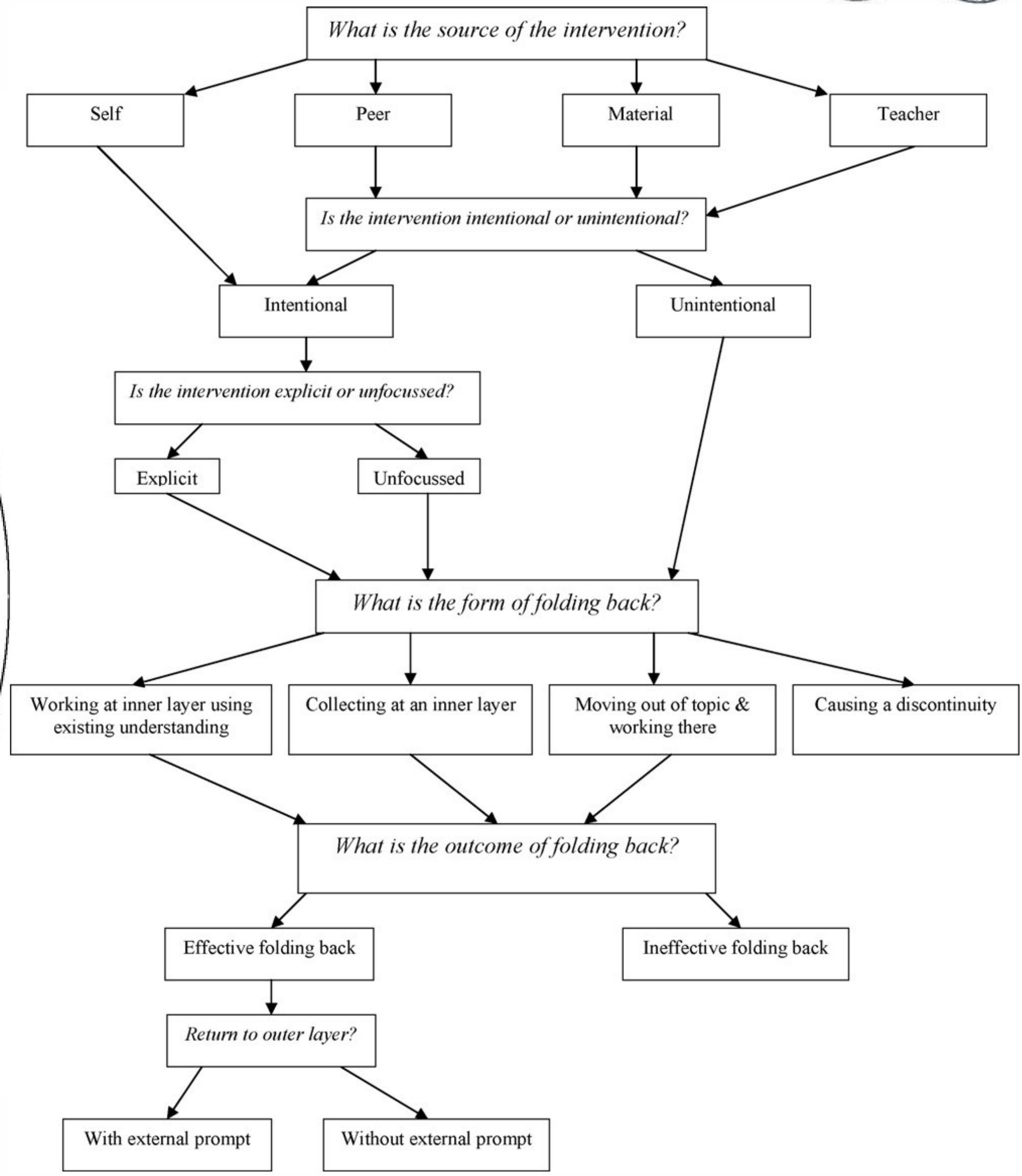
Otras investigaciones



PhD (Gallardo Romero, 2004)

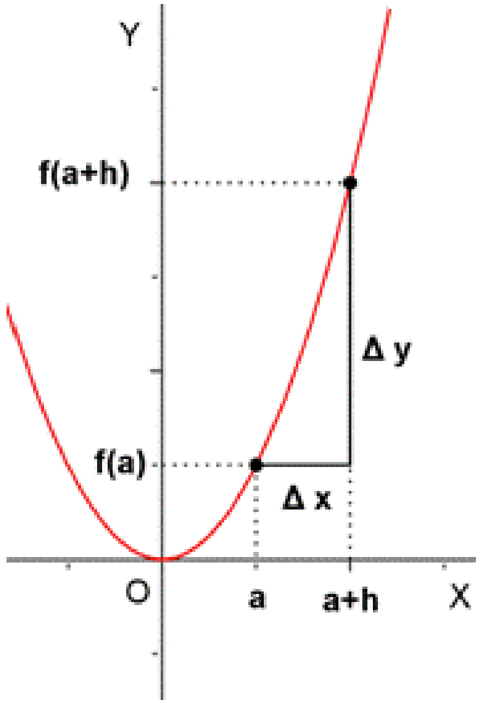
Otras investigaciones

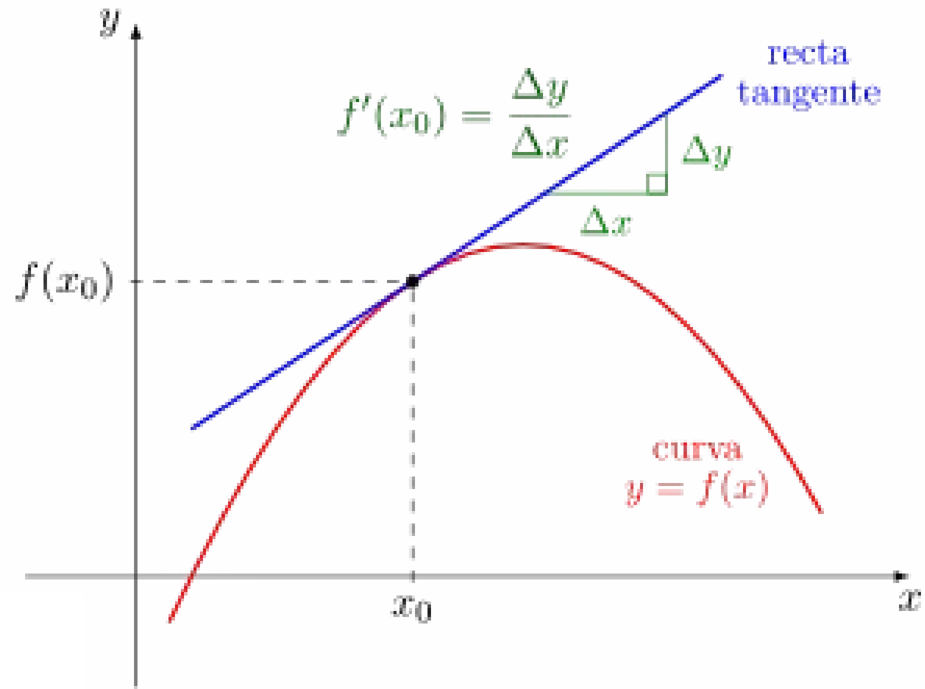


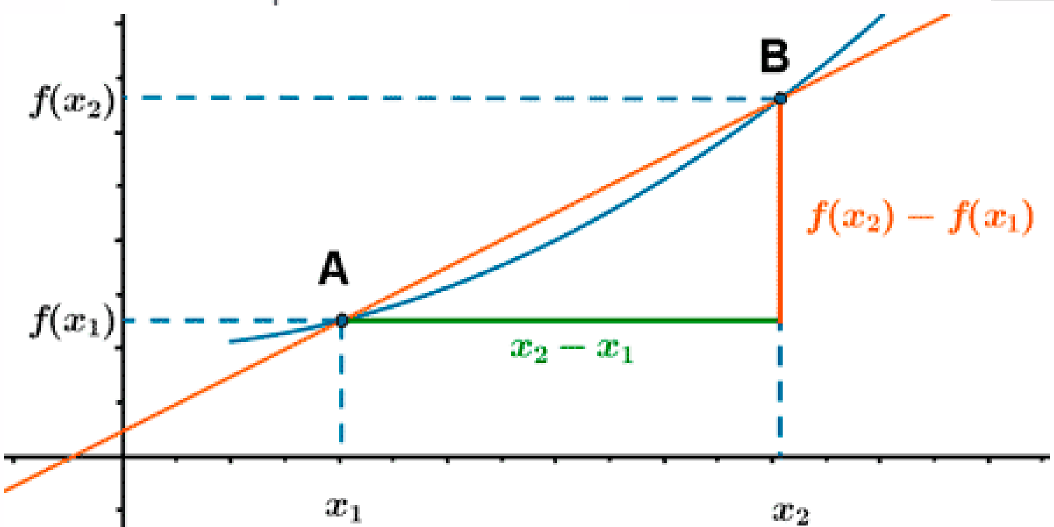


(Martin, 2008)

Otras investigaciones



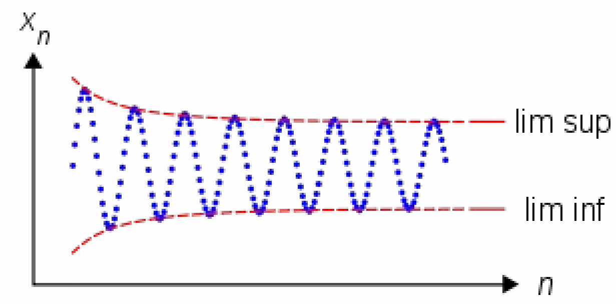




PhD (Villa Ochoa, 2011)

Otras investigaciones

$$\infty$$



$$\sum_{i=0}^{\infty} a_n$$

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

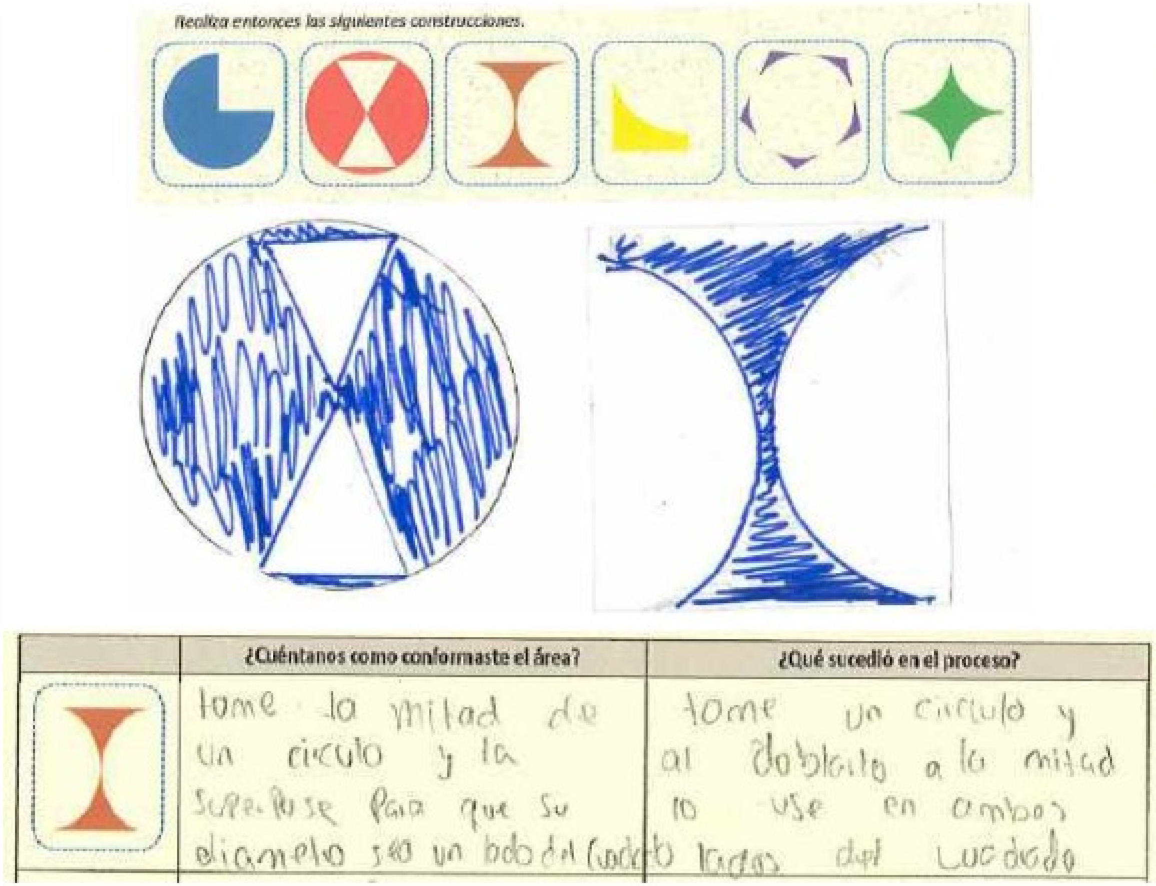
$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

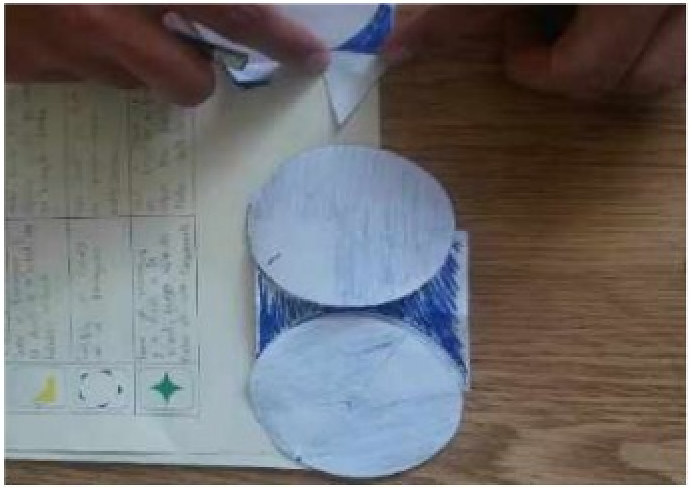
$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

$$S_5 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} = \frac{5}{6}.$$

Codes Valcarce, Delgado Martín, González Astudillo y Monterrubio Pérez (2013) y Delgado Martín, Codes Valcarce, Monterrubio Pérez y González Astudillo (2014)

Otras investigaciones





(Plazas Alvarado, 2020)

Otras investigaciones

La calle	El poste
	

CP – CrI – CoI – OP – F – O – E – I

MSc (Carmona Correa, 2020)

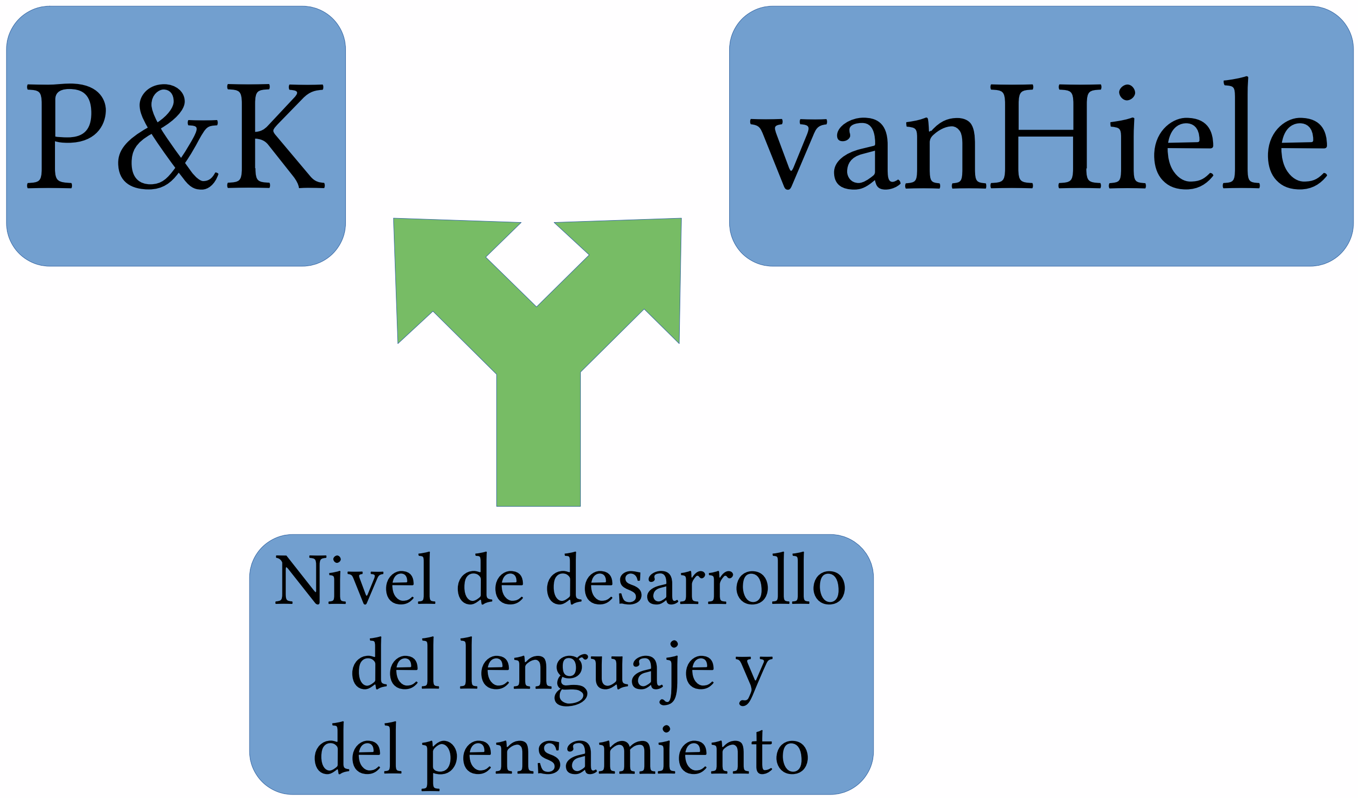
Otras investigaciones

La calle	El poste
	

CP – CrI – CoI – OP – F – O – E – I

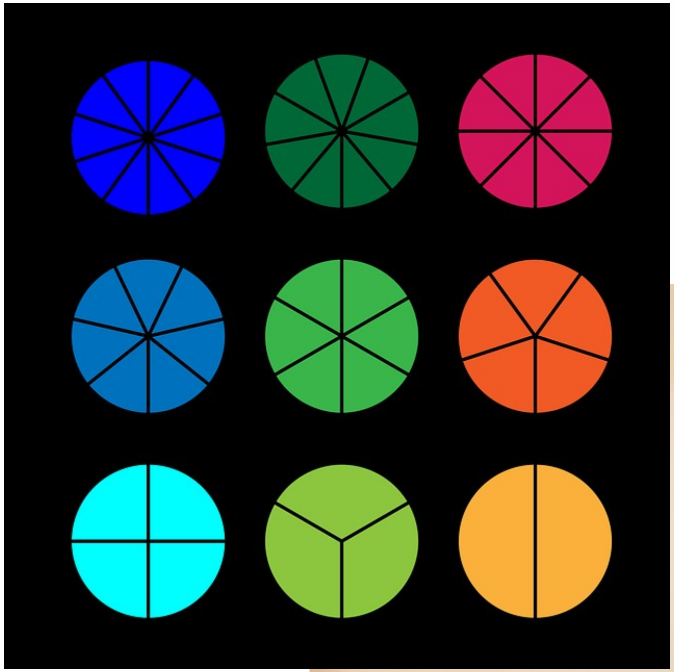
MSc (Carmona Correa, 2020)

Otras investigaciones



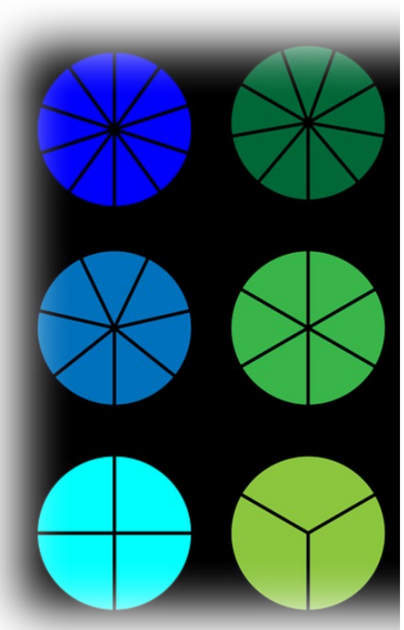
(Angulo Vergara, Arteaga Valdés y Carmenates Barrios, 2020)

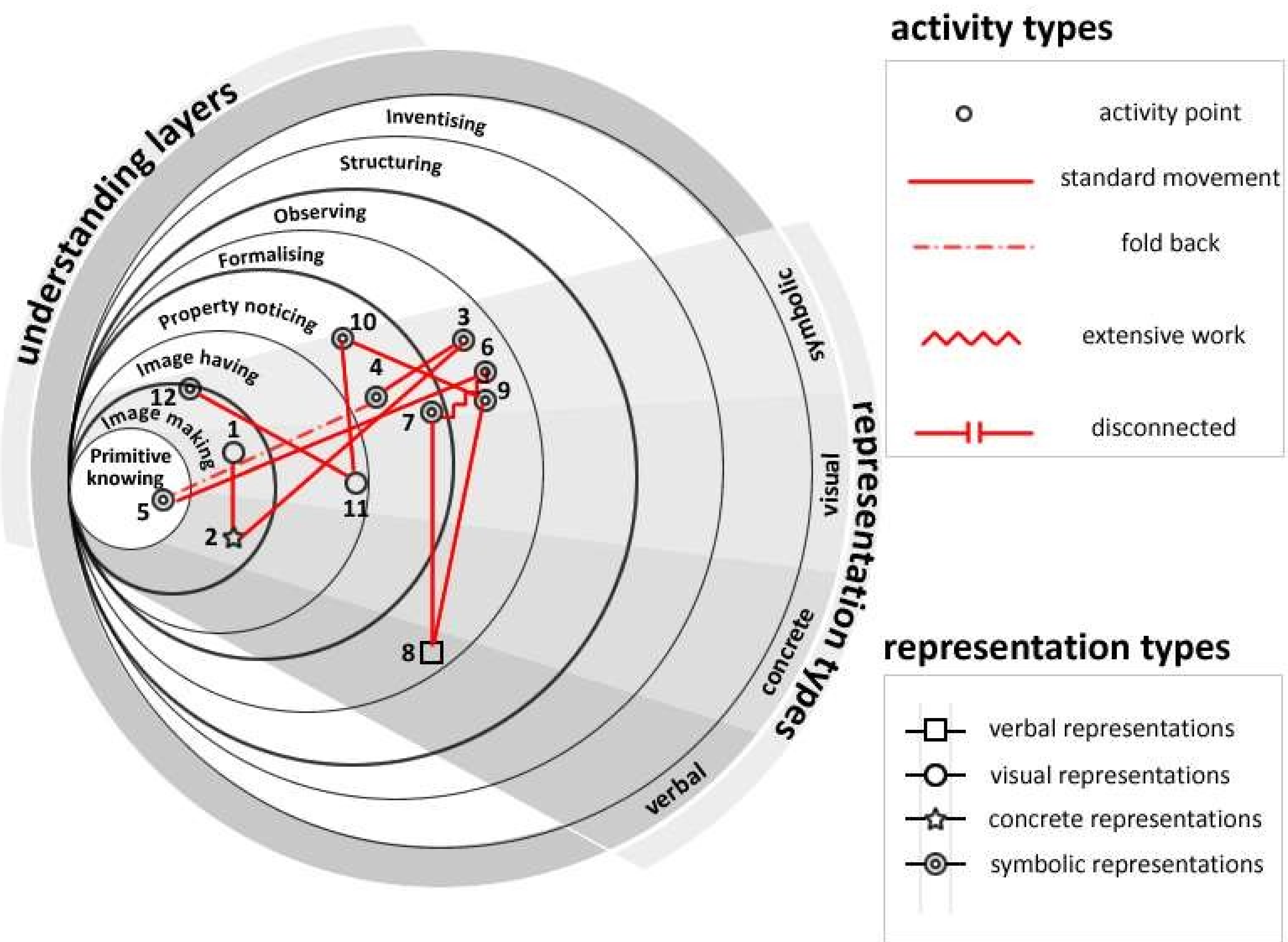
Otras investigaciones



(Gonzalez, 2022)

Otras investigaciones



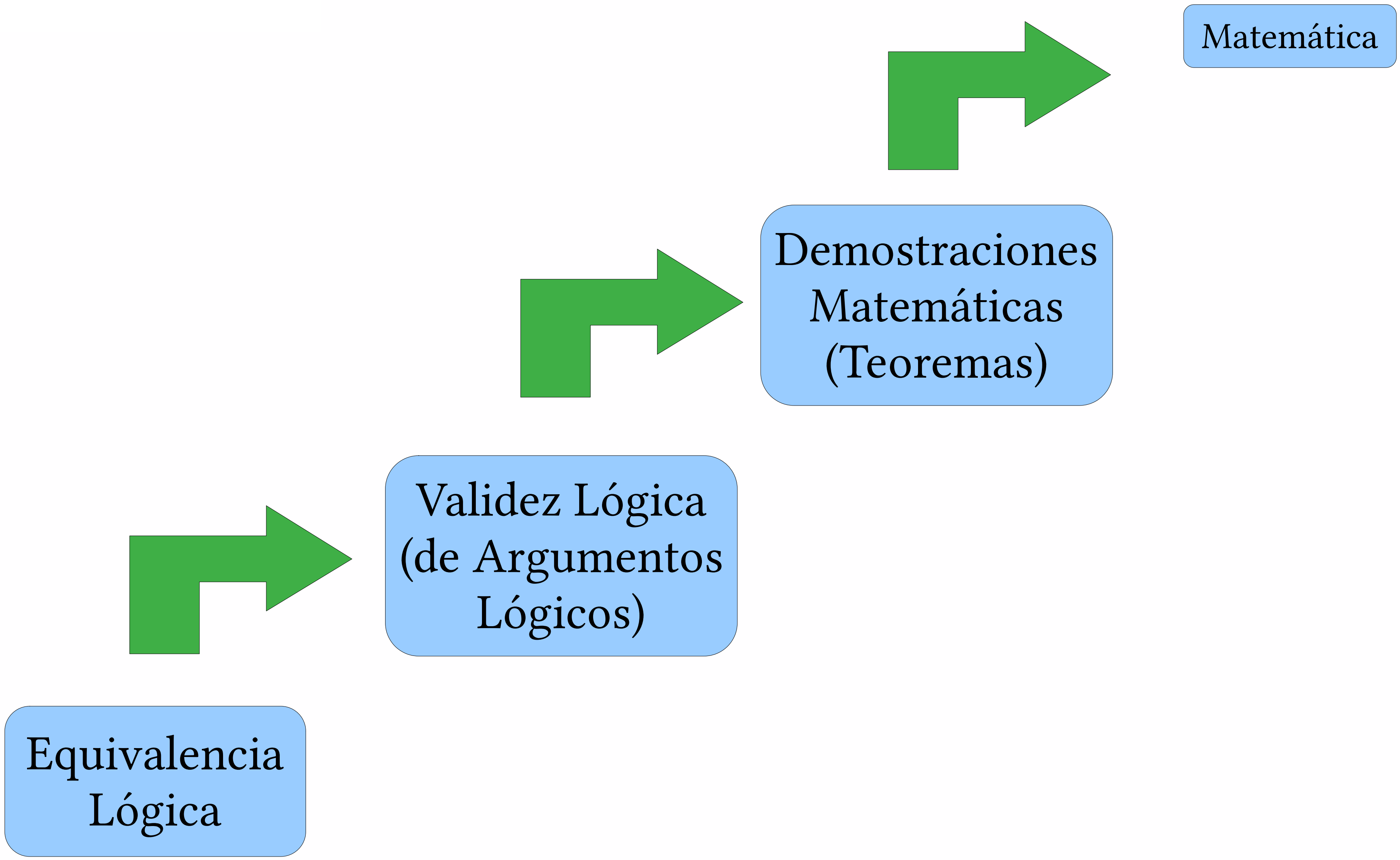


(Gokalp & Bulut, 2018)

Navas-López, E. A. (2022). **Comprensión del concepto de equivalencia lógica a través del modelo de Pirie y Kieren.**

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, *35*(1), 158–170. https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/61

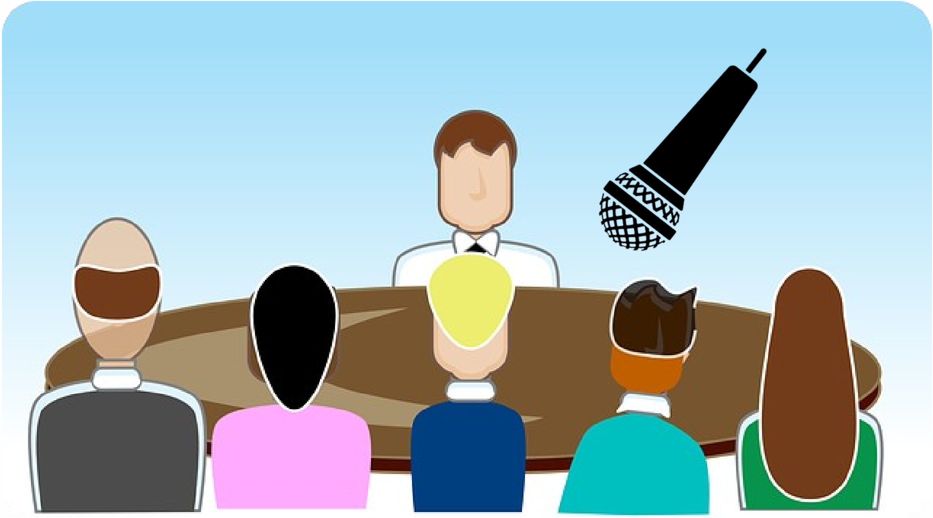
Justificación



(Alfaro Carbajal, Flores Martínez y Valverde Soto, 2019)

Metodología

- En este estudio cualitativo de estudio de caso, se analizan las conversaciones grabadas de tres alumnos universitarios de primer año mientras resuelven una serie de **ejercicios de equivalencias lógicas**.
- La grabación fue transcrita y analizada posteriormente para identificar cada intervención junto con el avance logrado en la resolución hasta ese momento y el nivel de comprensión según el modelo de Pirie y Kieren.



$$(p \vee q) \wedge \neg p \iff \neg p \wedge q$$

$$p \to (q \to r) \iff (p \wedge q) \to r$$

$$(p \vee q) \to r \iff (p \to r) \wedge (q \to r)$$

Tabla de Equivalencias Lógicas

Doble negación	$\neg\neg p \iff p$	$\overline{\overline{p}} \iff p$	$\overline{\overline{p}} \iff p$
Leyes conmutativas	$p \vee q \iff q \vee p$ $p \wedge q \iff q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p$	$p \vee q \iff q \vee p$ $p \wedge q \iff q \wedge p$ $p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p$	$p + q \iff q + p$ $p \cdot q \iff q \cdot p$ $p \leftrightarrow q \iff q \leftrightarrow p$
Leyes asociativas	$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \iff p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \iff p \wedge (q \wedge r)$	$(p + q) + r \iff p + (q + r)$ $(p \cdot q) \cdot r \iff p \cdot (q \cdot r)$
Leyes distributivas	$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \iff (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p + (q \cdot r) \iff (p + q) \cdot (p + r)$ $p \cdot (q + r) \iff (p \cdot q) + (p \cdot r)$
Leyes de idempotencia	$p \vee p \iff p$ $p \wedge p \iff p$	$p \vee p \iff p$ $p \wedge p \iff p$	$p + p \iff p$ $p \cdot p \iff p$
Leyes de identidad	$p \vee \mathbf{F} \iff p$ $p \wedge \mathbf{V} \iff p$	$p \vee \mathbf{0} \iff p$ $p \wedge \mathbf{1} \iff p$	$p + \mathbf{0} \iff p$ $p \cdot \mathbf{1} \iff p$
Leyes de dominación	$p \vee \mathbf{V} \iff \mathbf{V}$ $p \wedge \mathbf{F} \iff \mathbf{F}$	$p \vee \mathbf{1} \iff \mathbf{1}$ $p \wedge \mathbf{0} \iff \mathbf{0}$	$p + \mathbf{1} \iff \mathbf{1}$ $p \cdot \mathbf{0} \iff \mathbf{0}$
Leyes de negación	$p \vee \neg p \iff \mathbf{V}$ $p \wedge \neg p \iff \mathbf{F}$	$p \vee \overline{p} \iff \mathbf{1}$ $p \wedge \overline{p} \iff \mathbf{0}$	$p + \overline{p} \iff \mathbf{1}$ $p \cdot \overline{p} \iff \mathbf{0}$
Leyes de De Morgan	$\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \iff \neg p \vee \neg q$	$\overline{p \vee q} \iff \overline{p} \wedge \overline{q}$ $\overline{p \wedge q} \iff \overline{p} \vee \overline{q}$	$\overline{p + q} \iff \overline{p} \cdot \overline{q}$ $\overline{p \cdot q} \iff \overline{p} + \overline{q}$
Leyes de absorción	$p \vee (p \wedge q) \iff p$ $p \wedge (p \vee q) \iff p$	$p \vee (p \wedge q) \iff p$ $p \wedge (p \vee q) \iff p$	$p + (p \cdot q) \iff p$ $p \cdot (p + q) \iff p$
Contrarrecíproca (o contrapositiva)	$p \to q \iff \neg q \to \neg p$	$p \to q \iff \overline{q} \to \overline{p}$	$p \to q \iff \overline{q} \to \overline{p}$
Implicación	$p \to q \iff \neg p \vee q$ $p \to q \iff \neg(p \wedge \neg q)$ $p \vee q \iff \neg p \to q$ $p \wedge q \iff \neg(p \to \neg q)$	$p \to q \iff \overline{p} \vee q$ $p \to q \iff \overline{p \wedge \overline{q}}$ $p \vee q \iff \overline{p} \to q$ $p \wedge q \iff \overline{p \to \overline{q}}$	$p \to q \iff \overline{p} + q$ $p \to q \iff \overline{p \cdot \overline{q}}$ $p + q \iff \overline{p} \to q$ $p \cdot q \iff \overline{p \to \overline{q}}$
Equivalencia	$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \iff (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $p \leftrightarrow q \iff \neg(p \oplus q)$	$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \wedge (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \iff (p \wedge q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$ $p \leftrightarrow q \iff \overline{p \oplus q}$	$p \leftrightarrow q \iff (p \to q) \cdot (q \to p)$ $p \leftrightarrow q \iff (p \cdot q) + (\overline{p} \cdot \overline{q})$ $p \leftrightarrow q \iff \overline{p \oplus q}$

Metodología

A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación ...

B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]

C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]

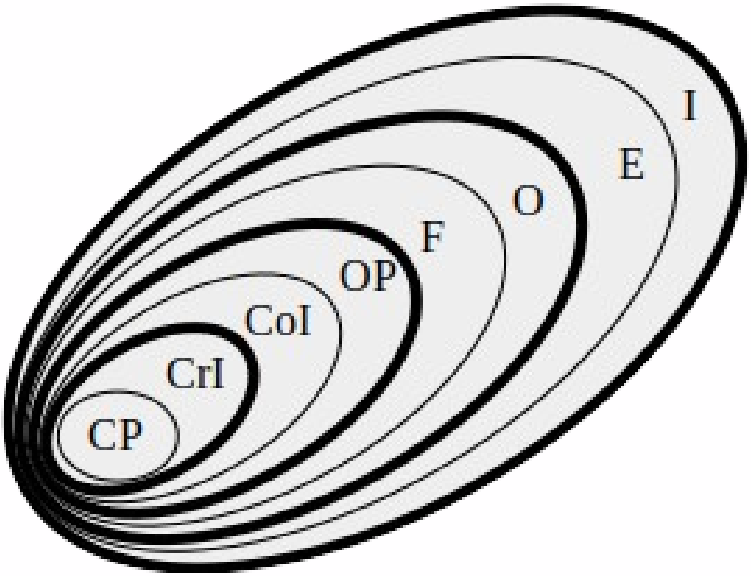
B: – Sí, esa.

C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]

P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla

C: – Vaya.

B: – Veamos la tabla ... [CrI]



Metodología

A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación ...

B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]

C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]

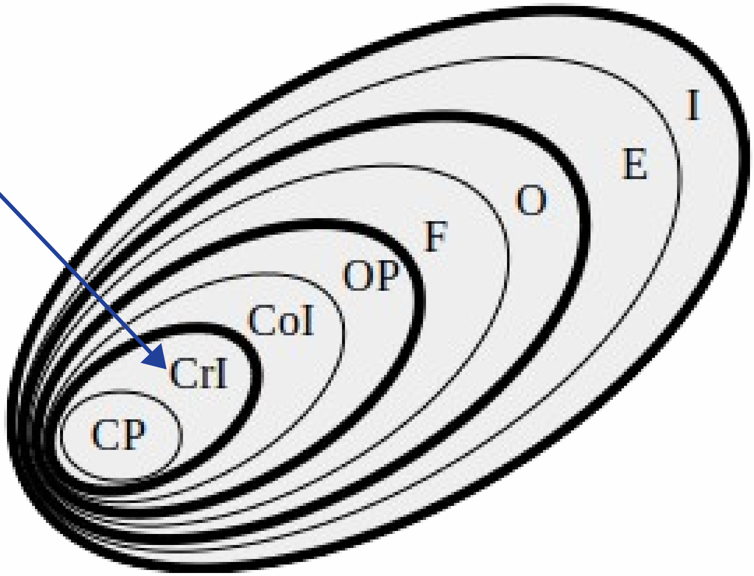
B: – Sí, esa.

C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]

P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla

C: – Vaya.

B: – Veamos la tabla ... [CrI]



Metodología

A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación ...

B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]

C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]

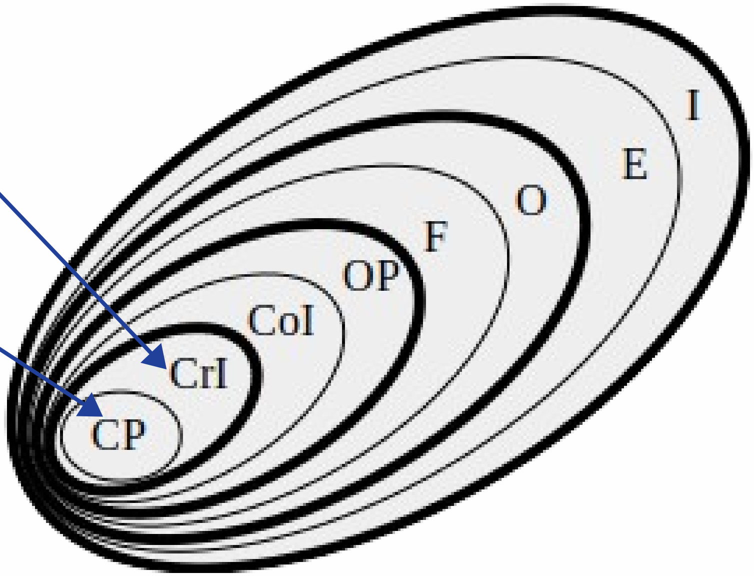
B: – Sí, esa.

C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]

P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla

C: – Vaya.

B: – Veamos la tabla ... [CrI]



Metodología

A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación ...

B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]

C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]

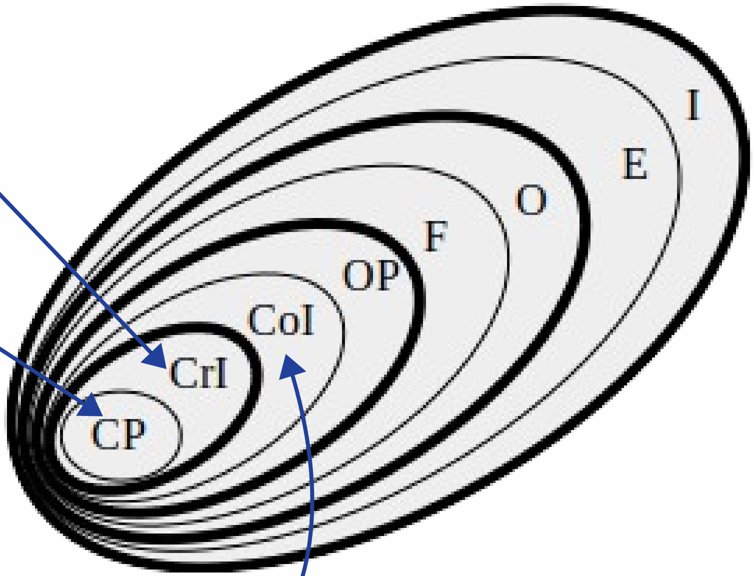
B: – Sí, esa.

C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]

P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla

C: – Vaya.

B: – Veamos la tabla ... [CrI]



Metodología

A: (Lee). – Demuestre por medio de la aplicación …

B: – Ah, tenemos que usar la tabla. [Se refiere a la tabla de propiedades del Álgebra Proposicional (ver Tabla 1)] [CrI]

C: – ¿La que nos dio el Profe? [CP]

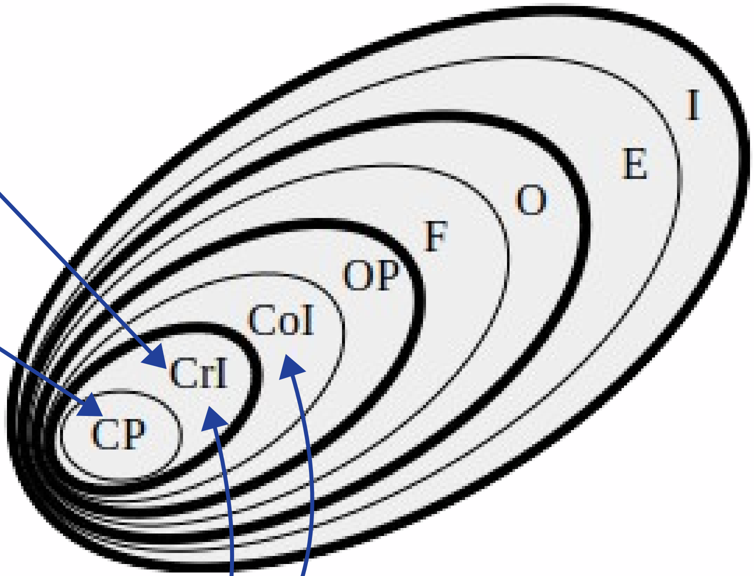
B: – Sí, esa.

C: – ¿No lo podemos hacer por Tablas de Verdad? [CoI]

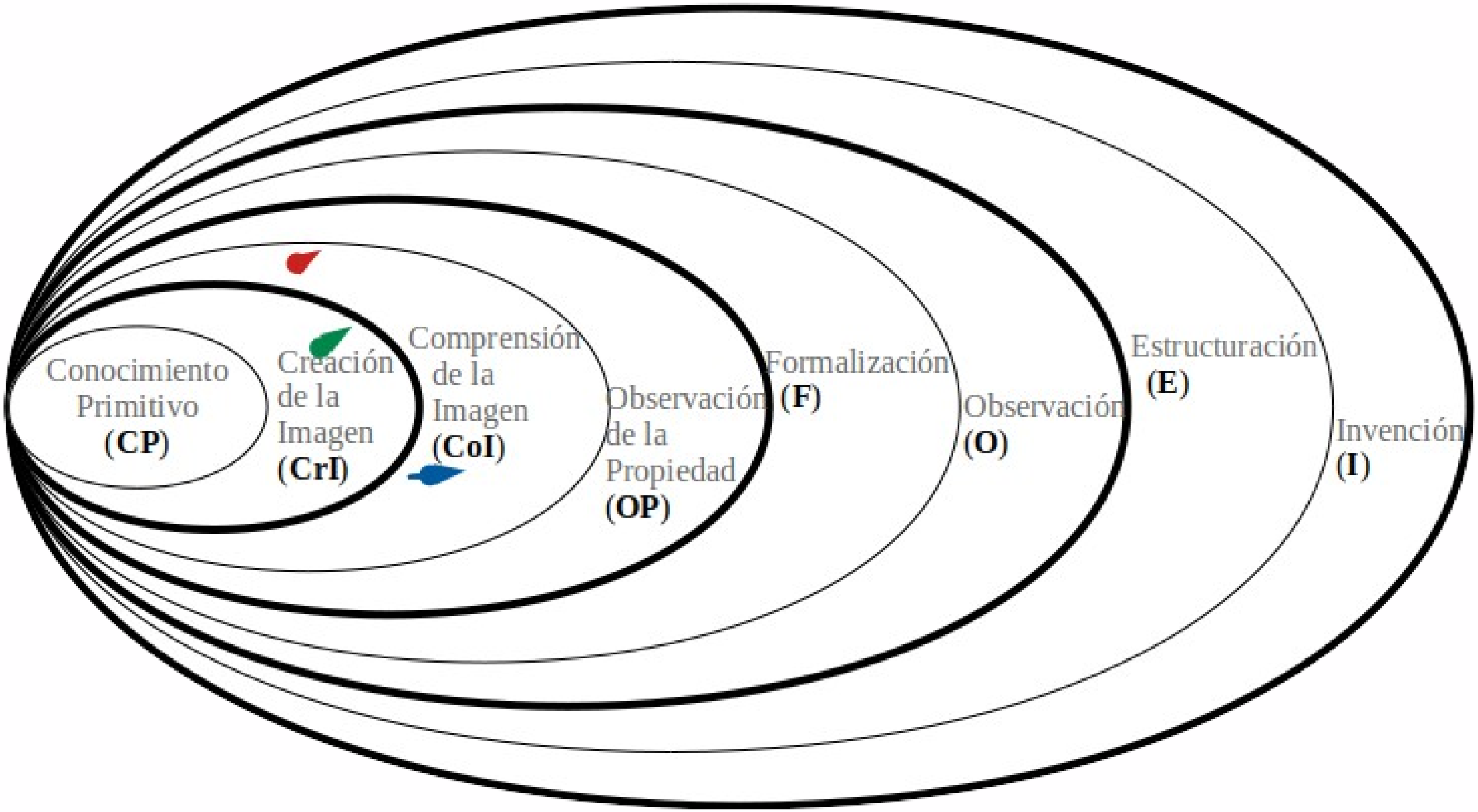
P: – No. En esta ocasión deben hacerlo usando las propiedades de la tabla

C: – Vaya.

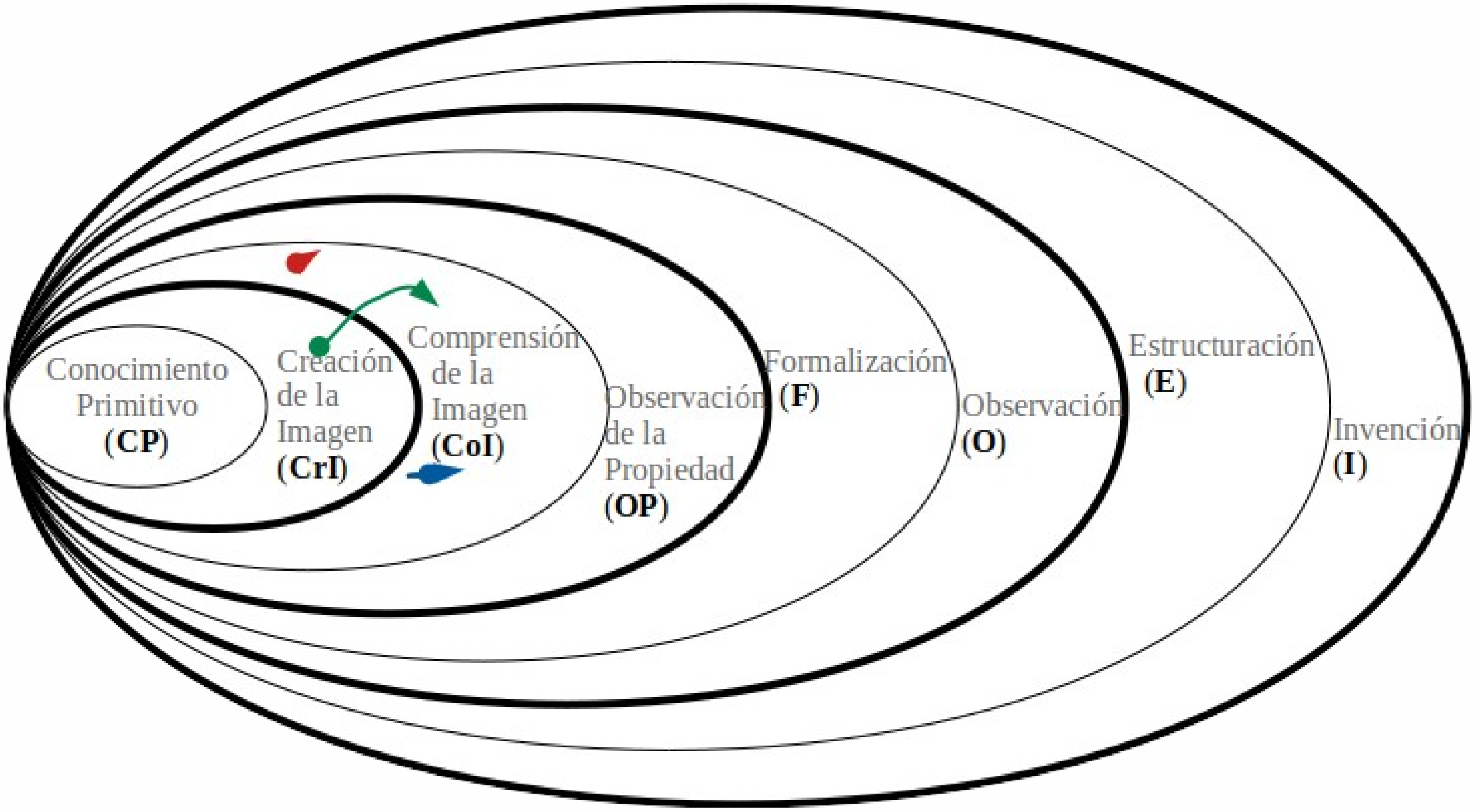
B: – Veamos la tabla … [CrI]



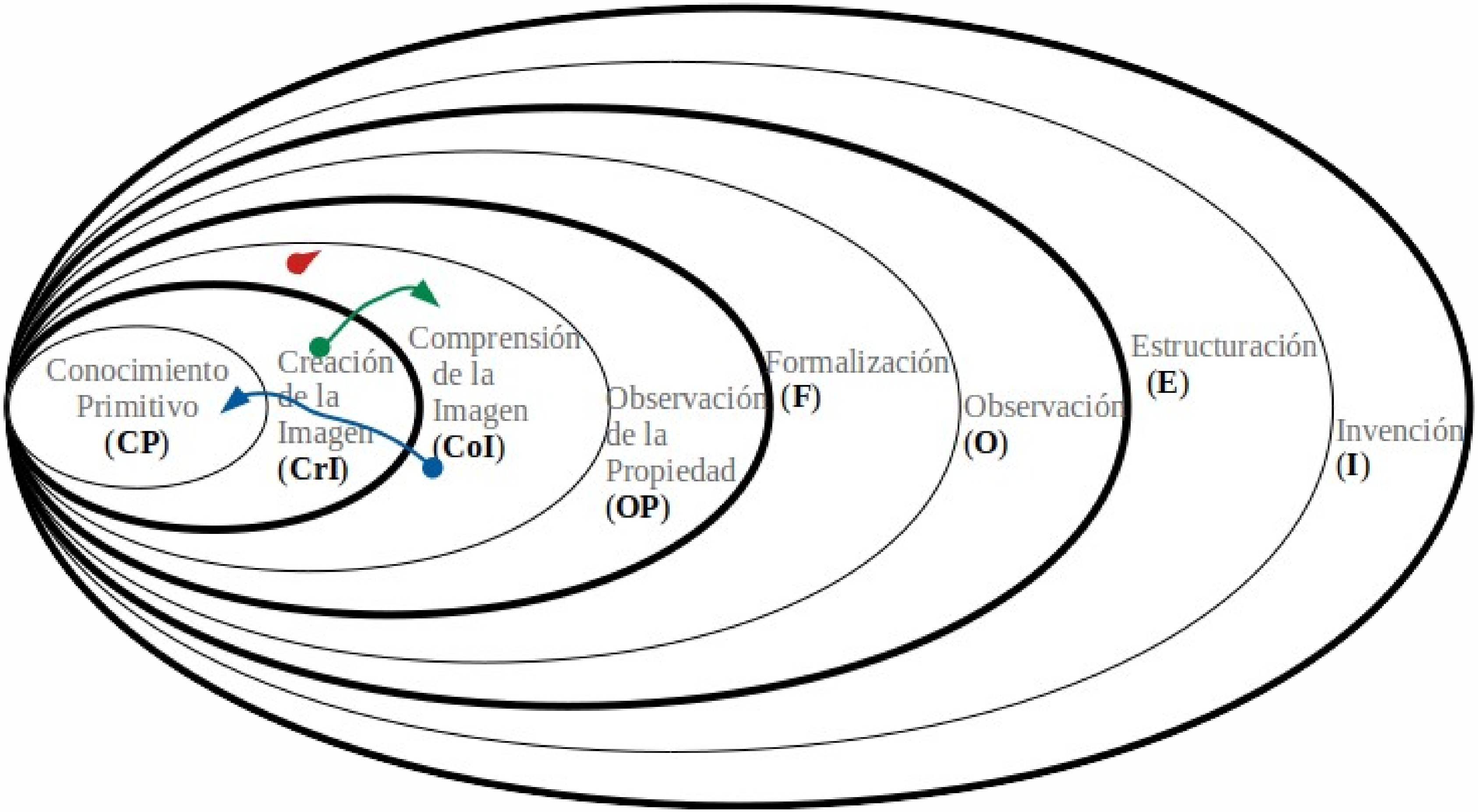
Análisis de las Conversaciones



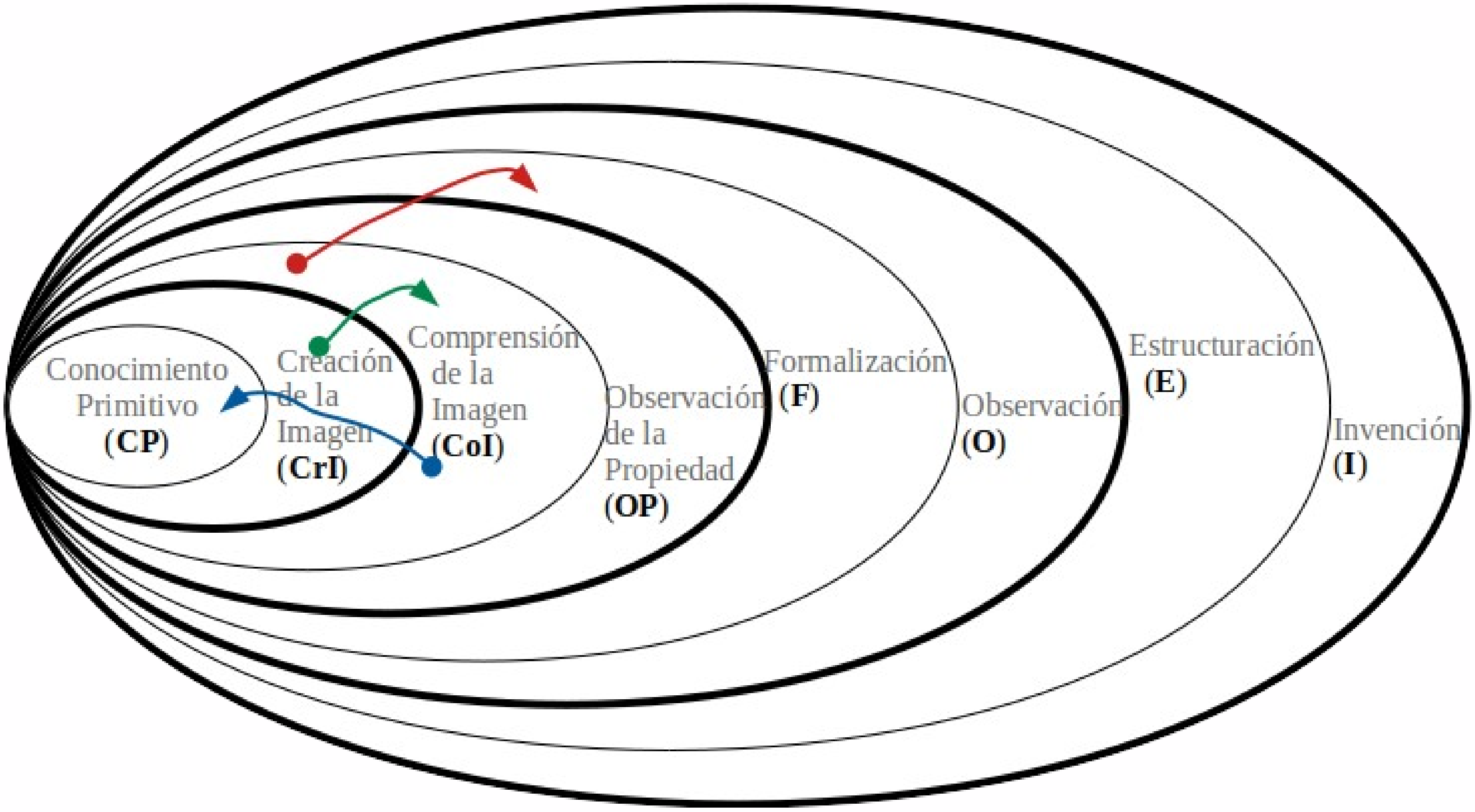
Análisis de las Conversaciones



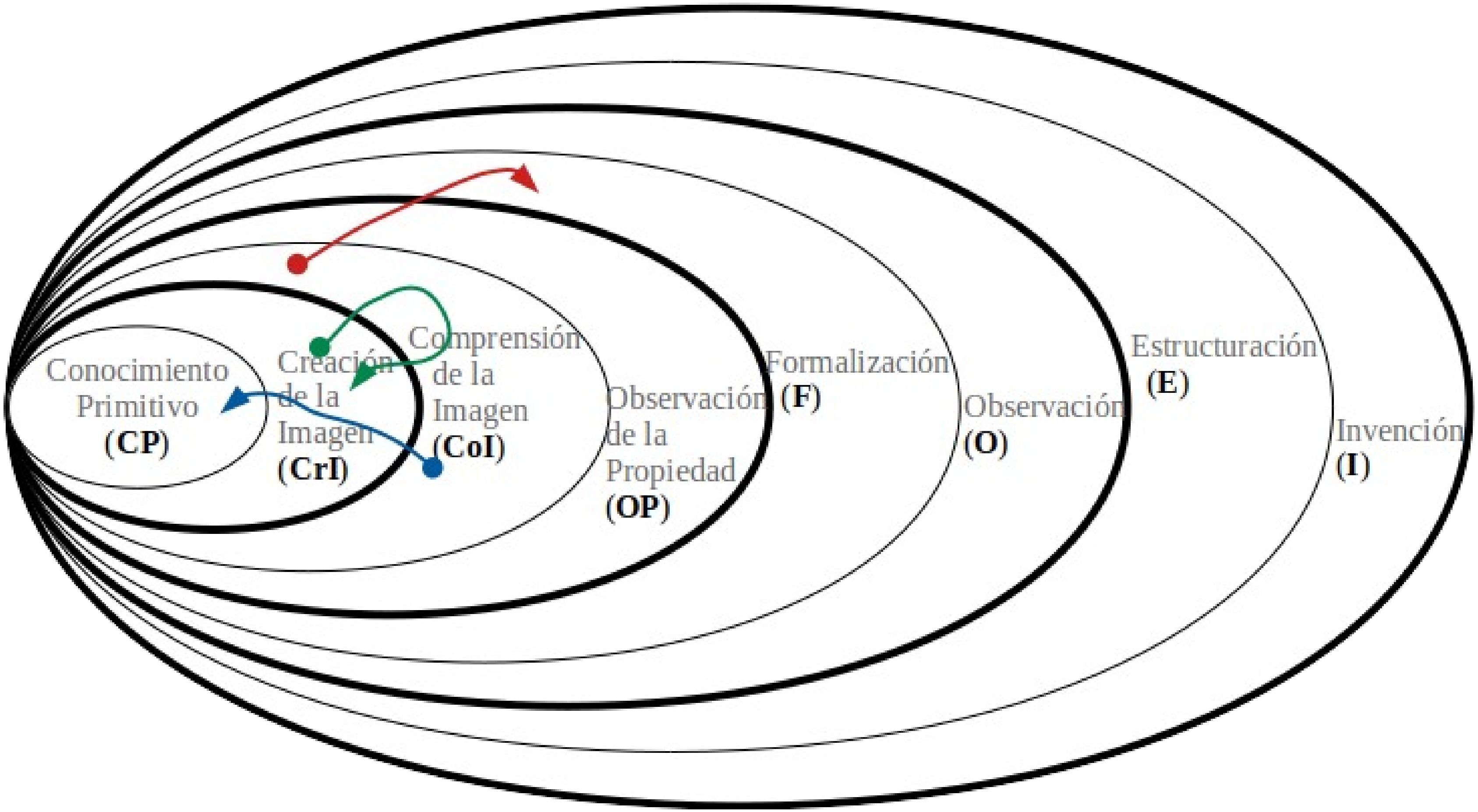
Análisis de las Conversaciones



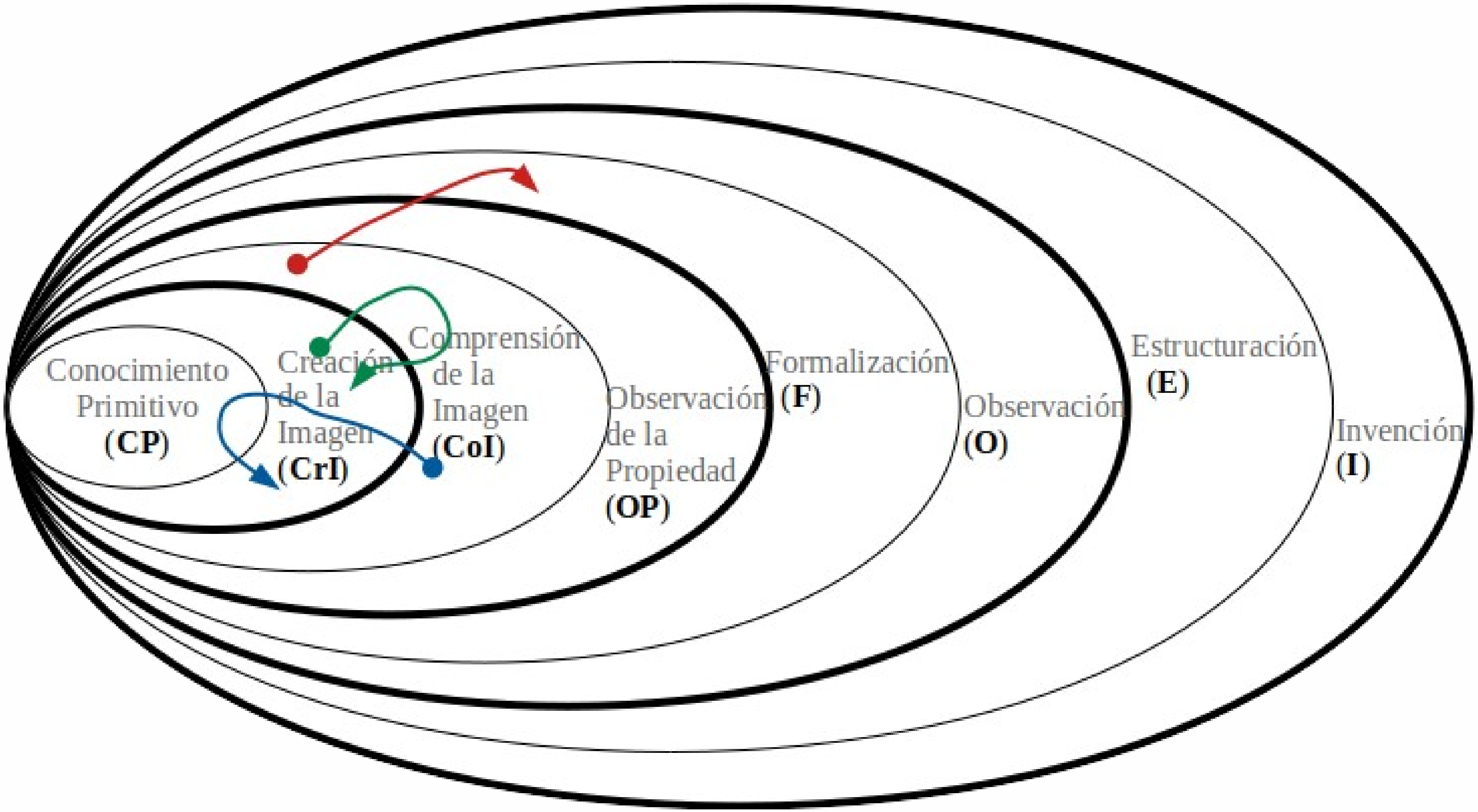
Análisis de las Conversaciones



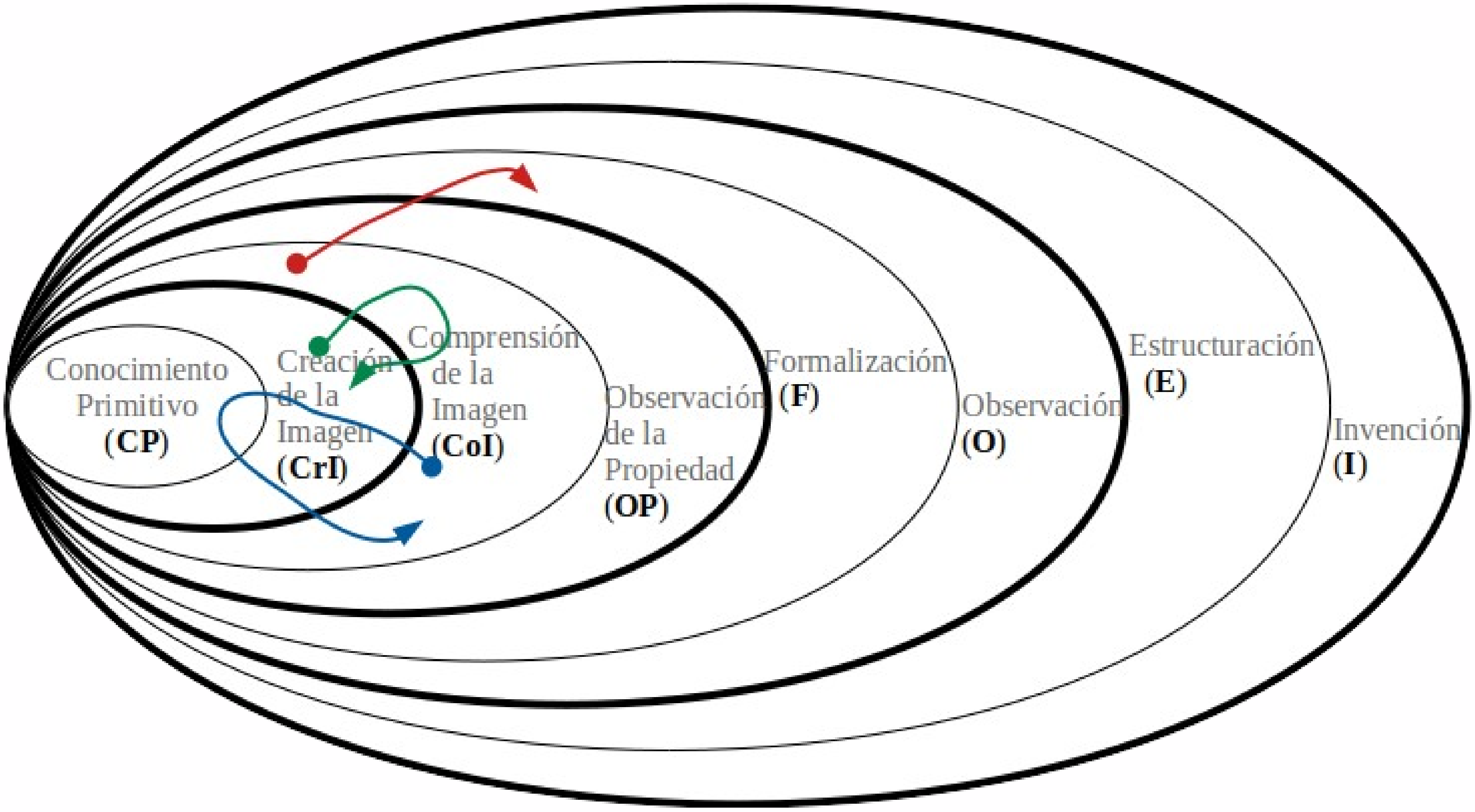
Análisis de las Conversaciones



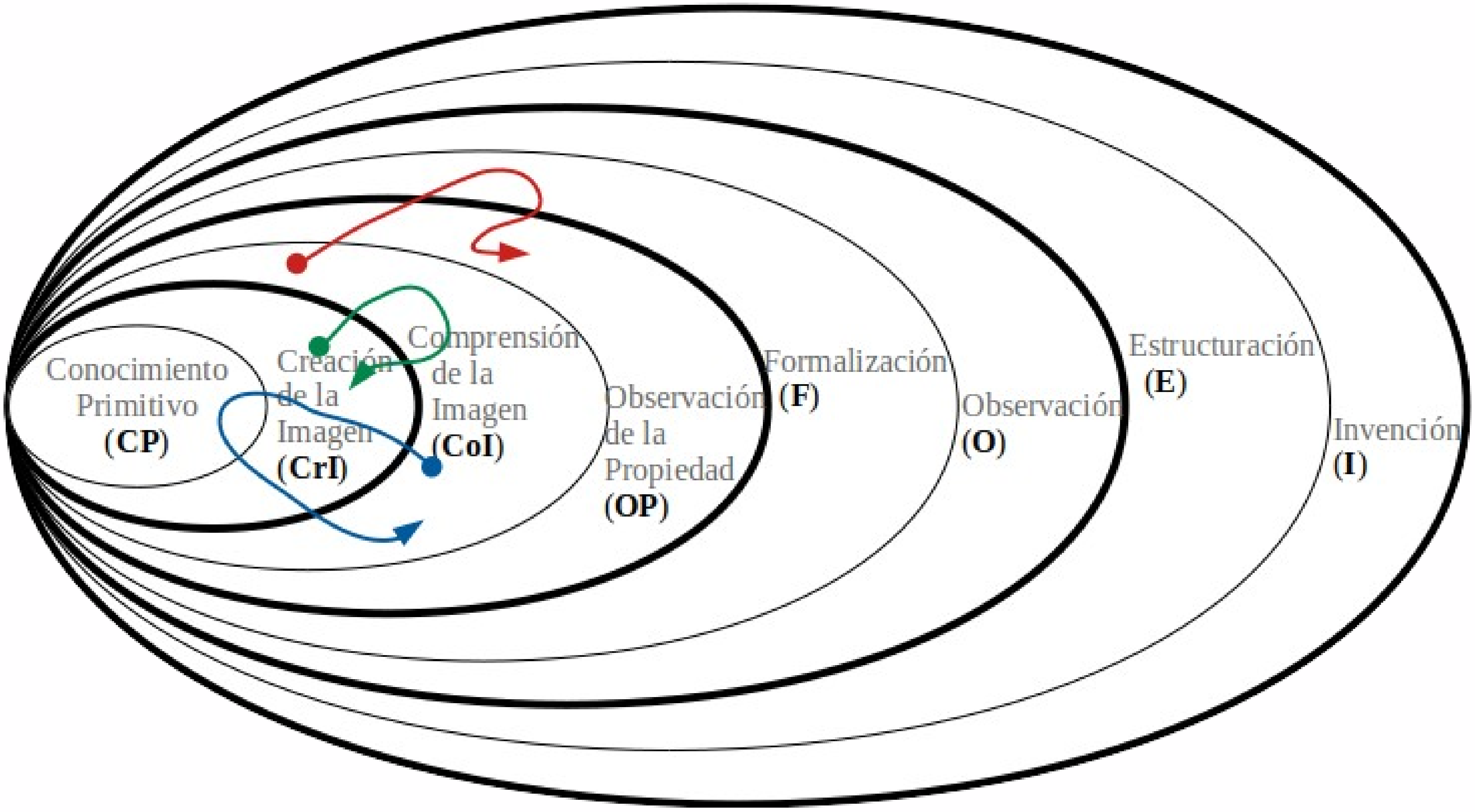
Análisis de las Conversaciones



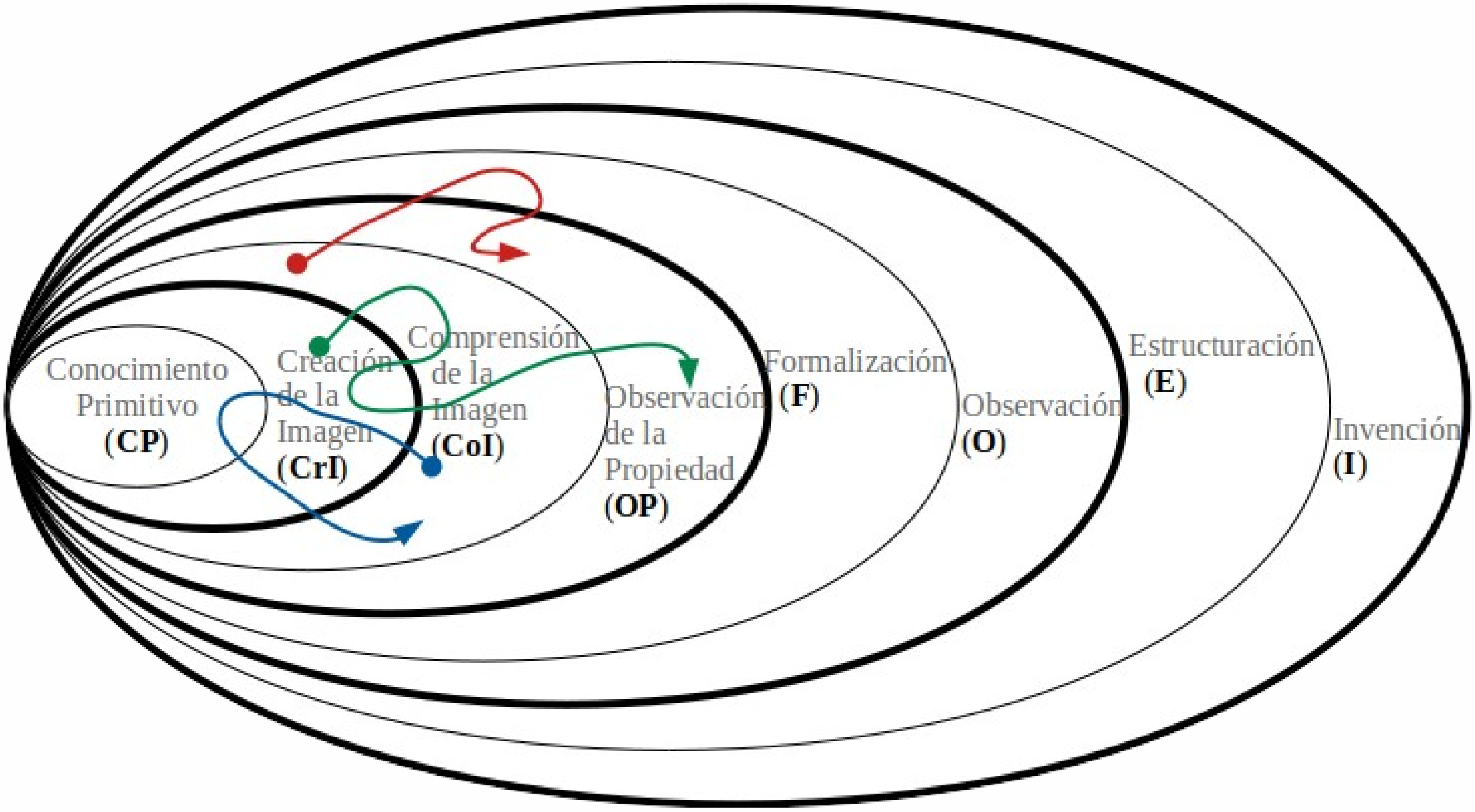
Análisis de las Conversaciones



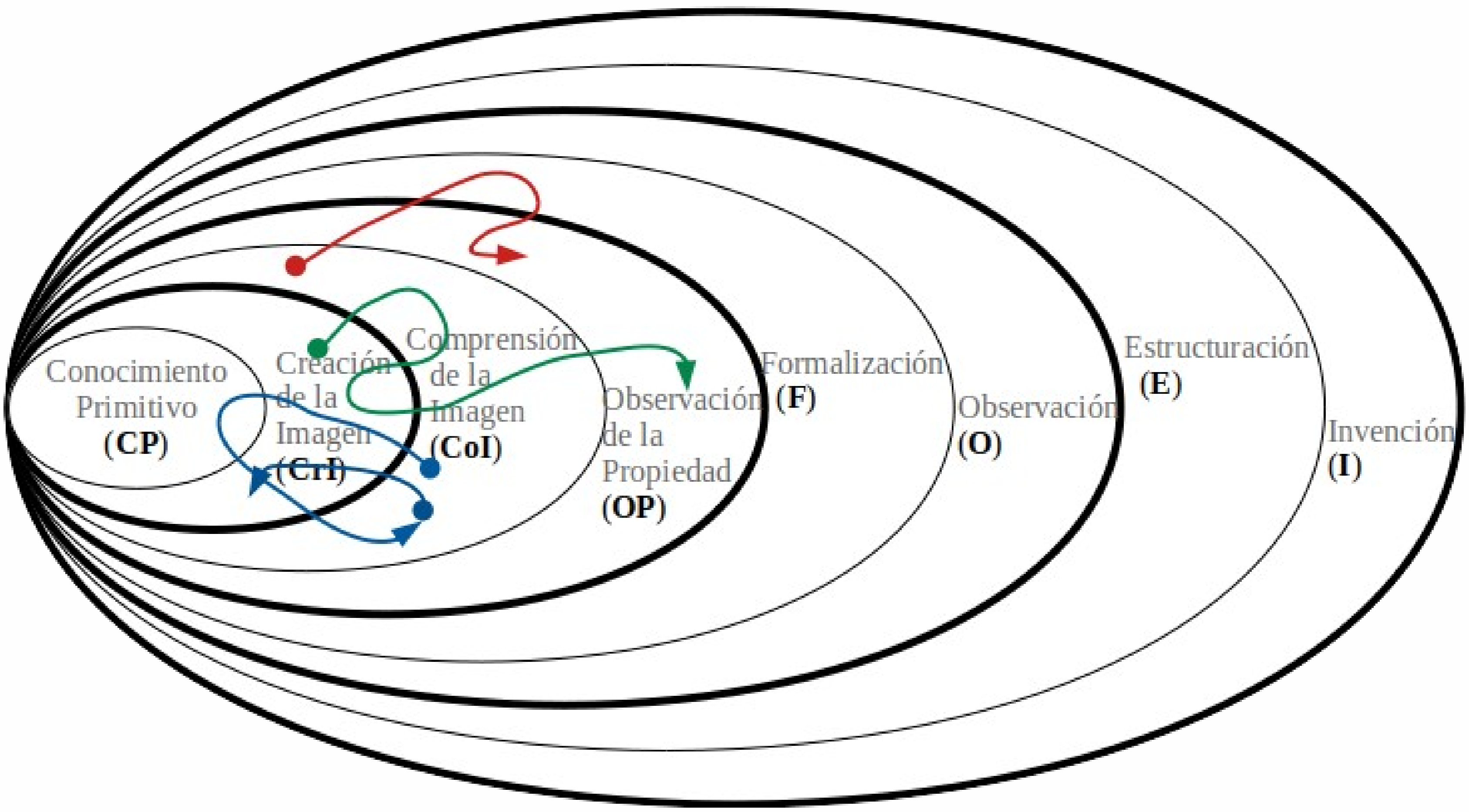
Análisis de las Conversaciones



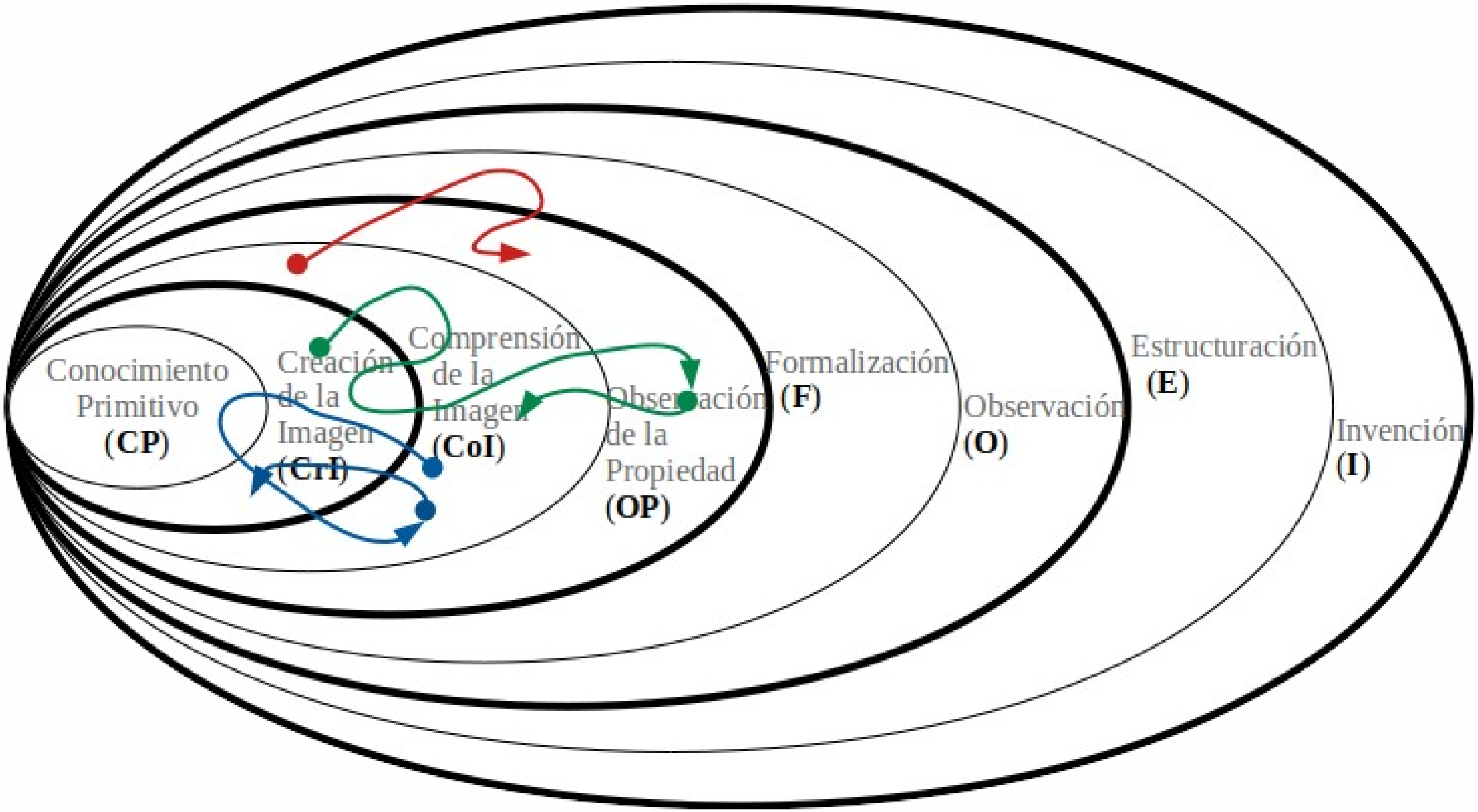
Análisis de las Conversaciones



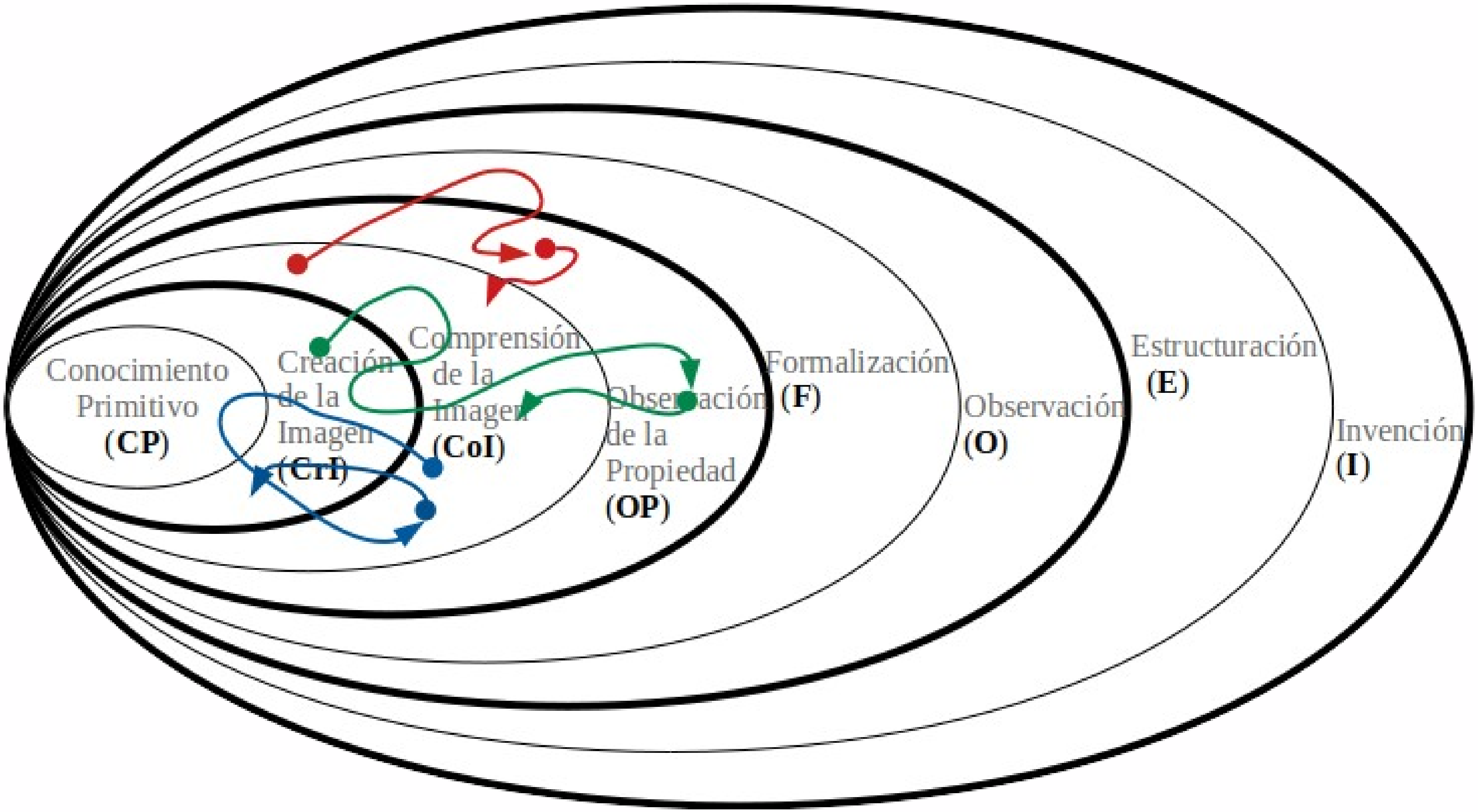
Análisis de las Conversaciones



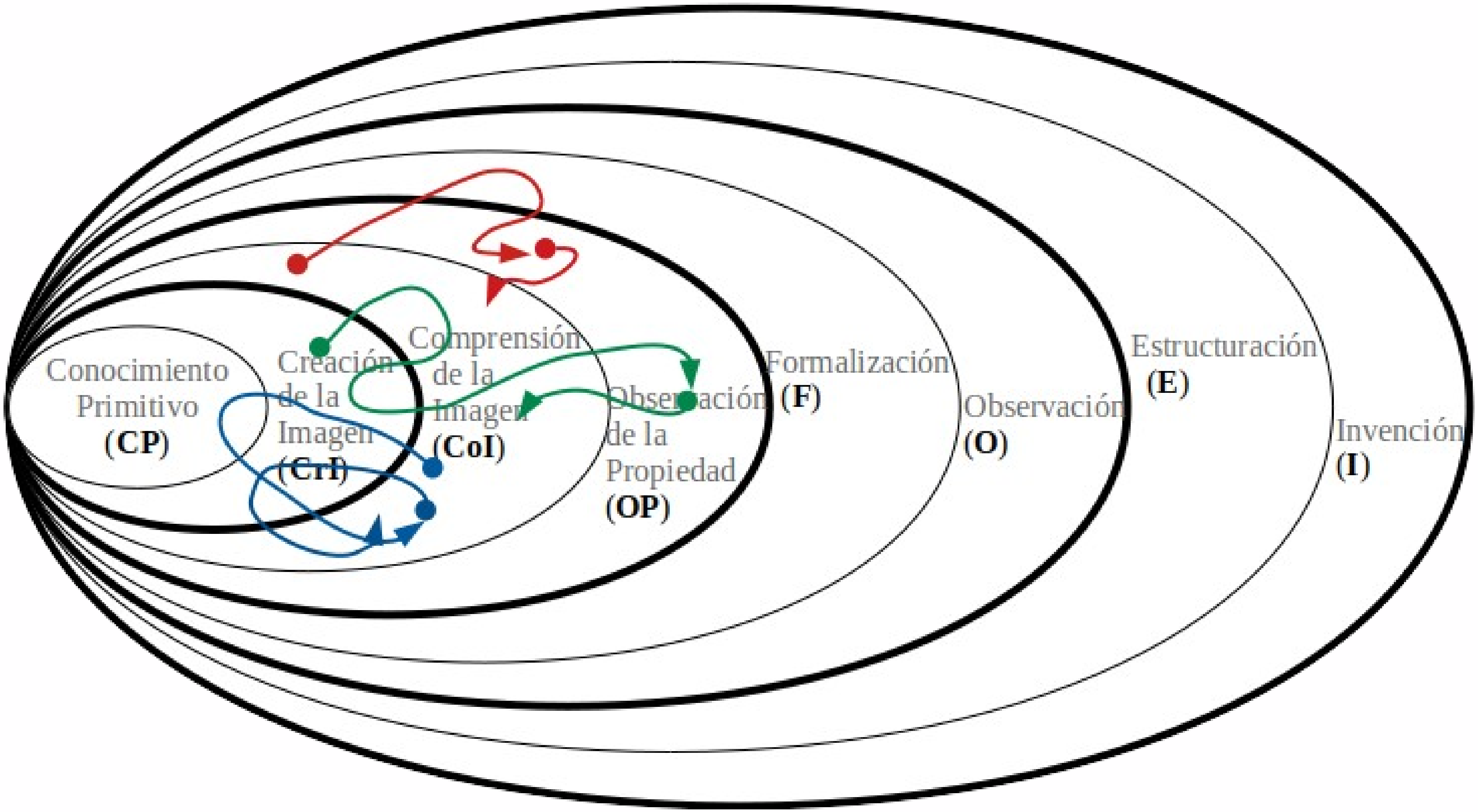
Análisis de las Conversaciones



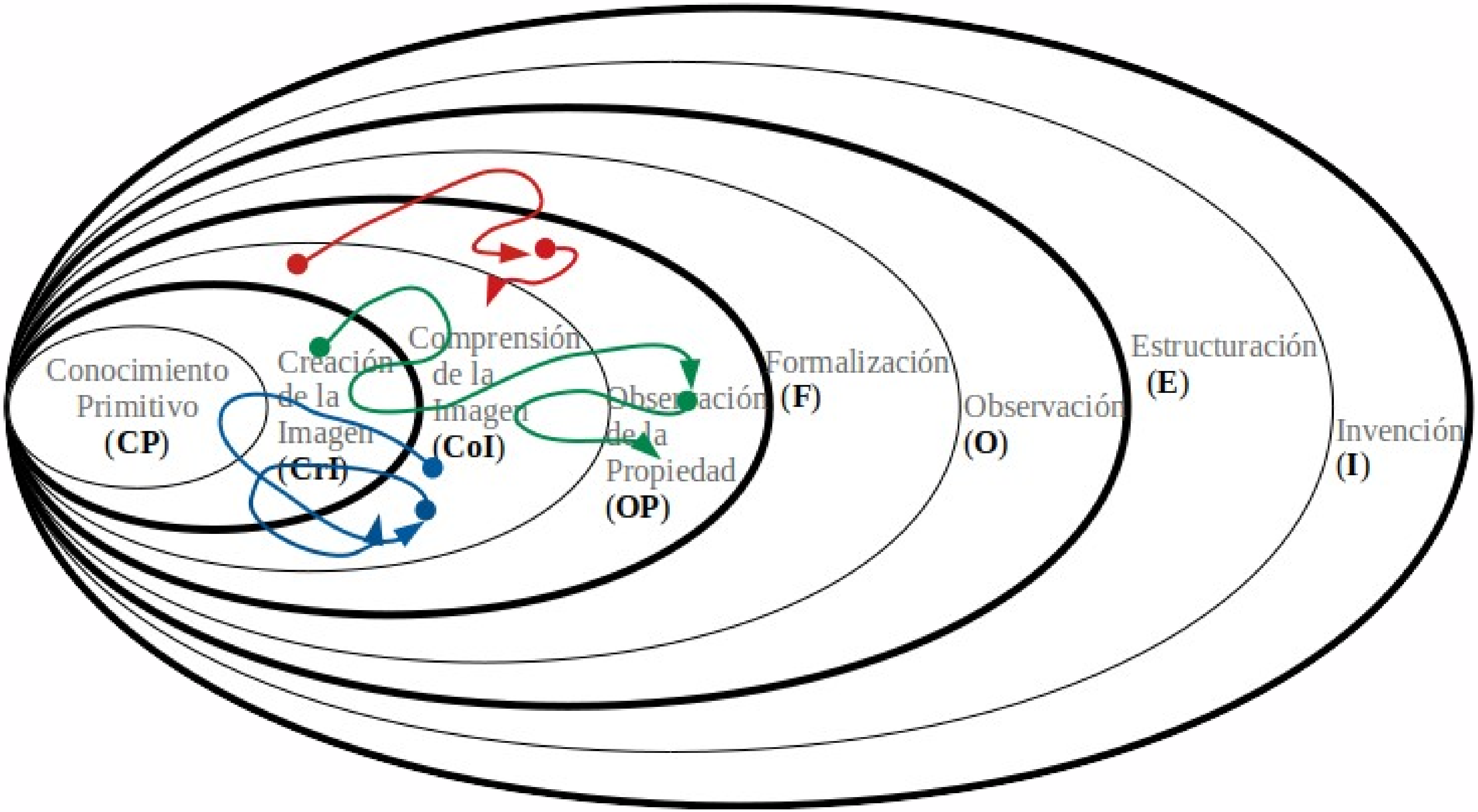
Análisis de las Conversaciones



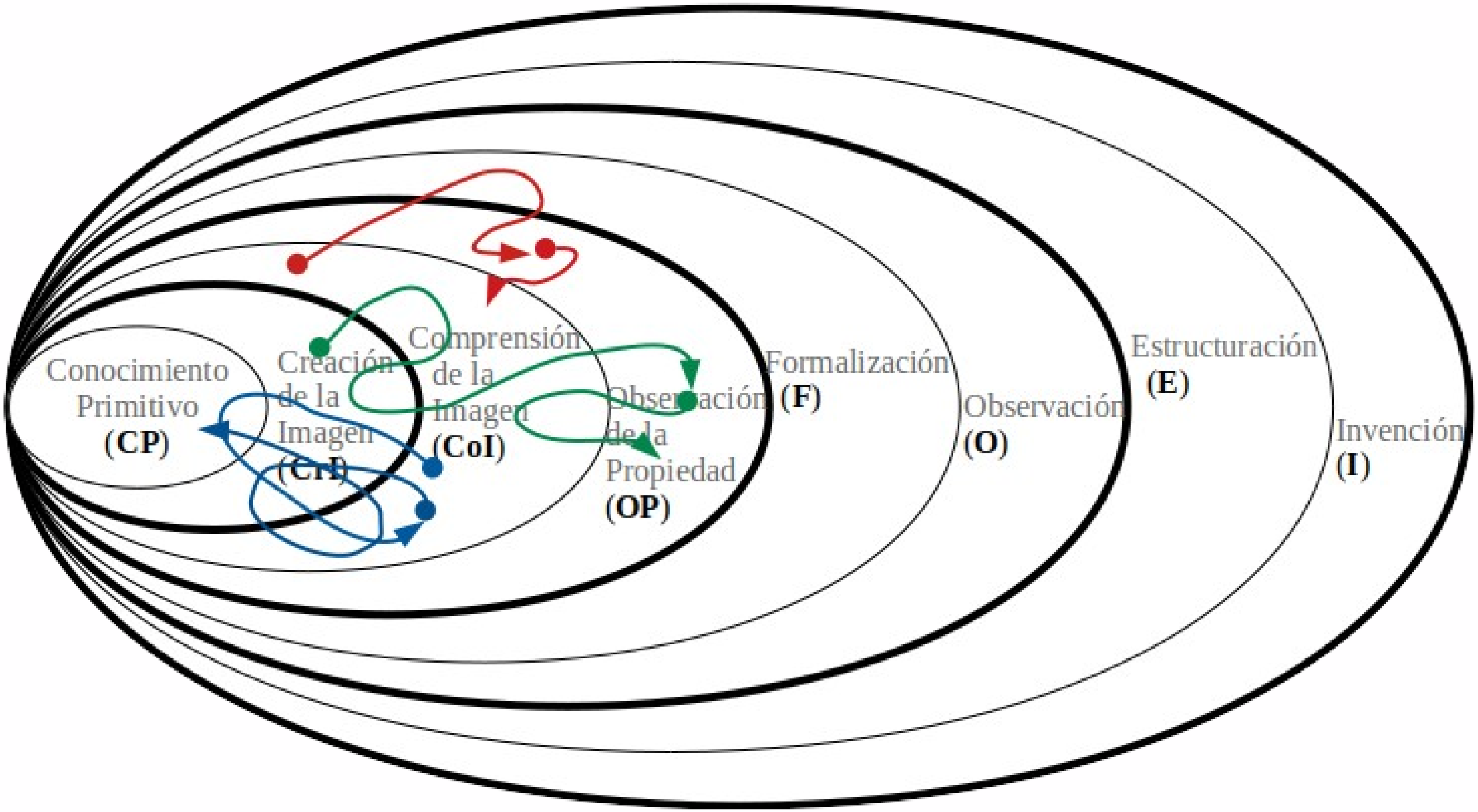
Análisis de las Conversaciones



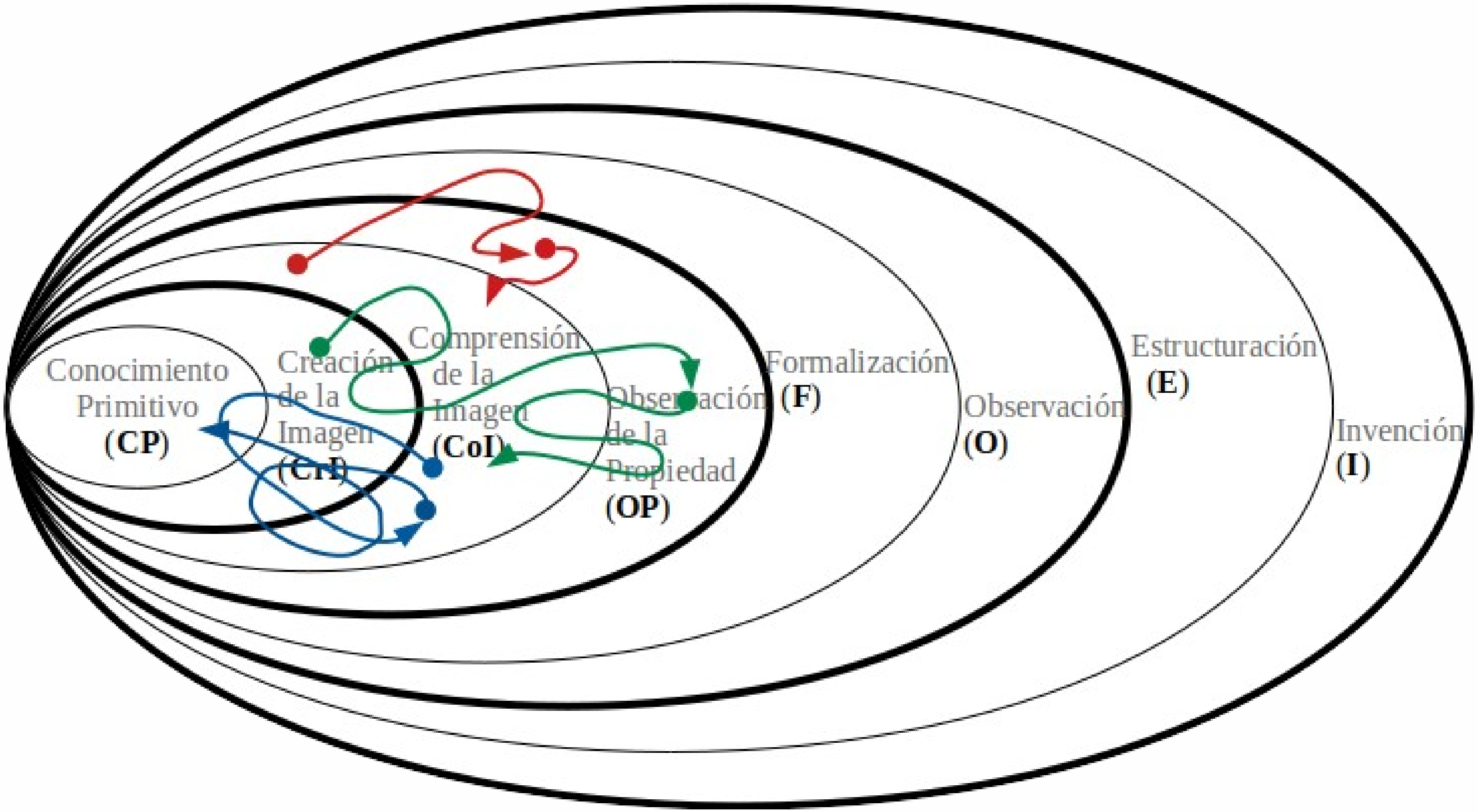
Análisis de las Conversaciones



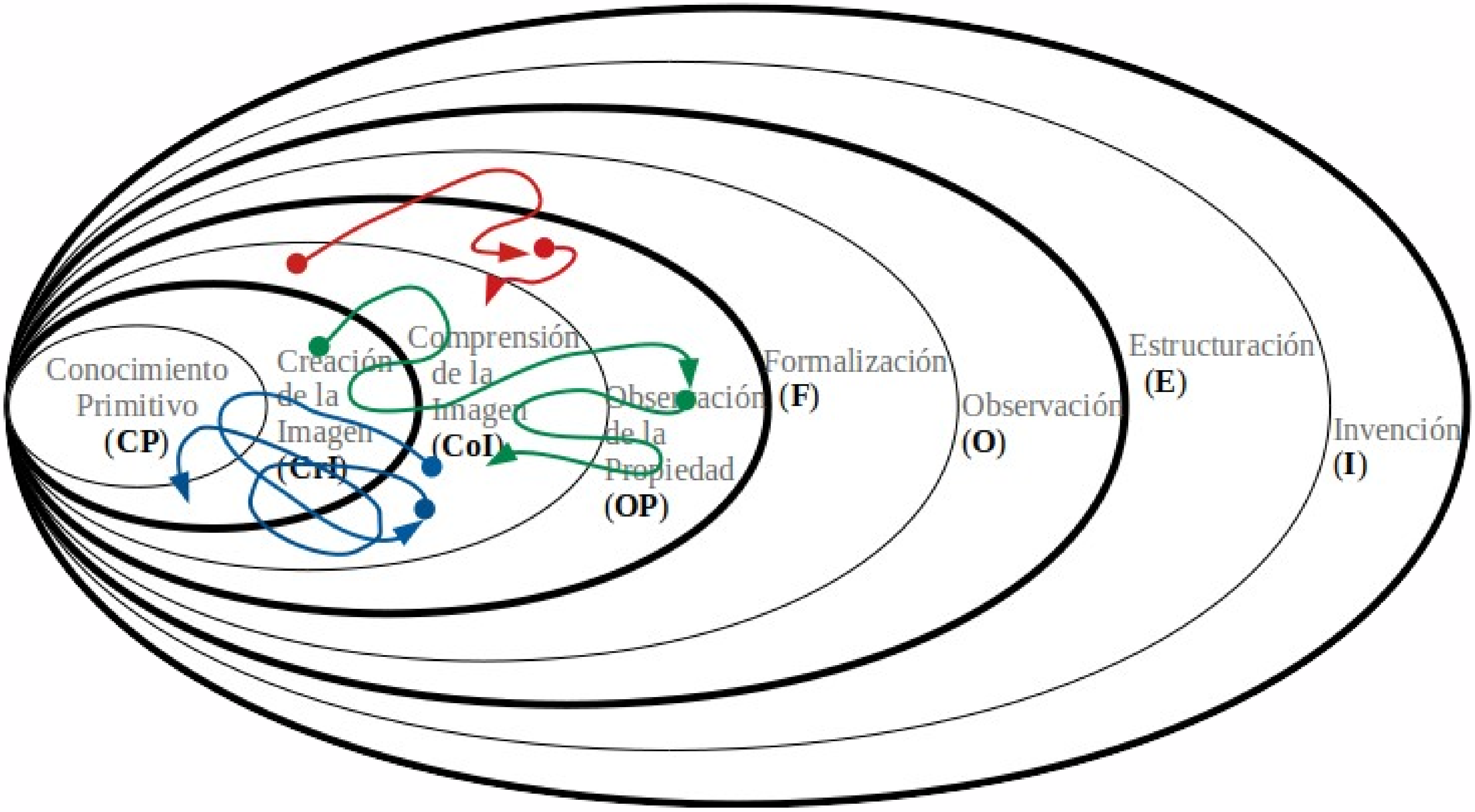
Análisis de las Conversaciones



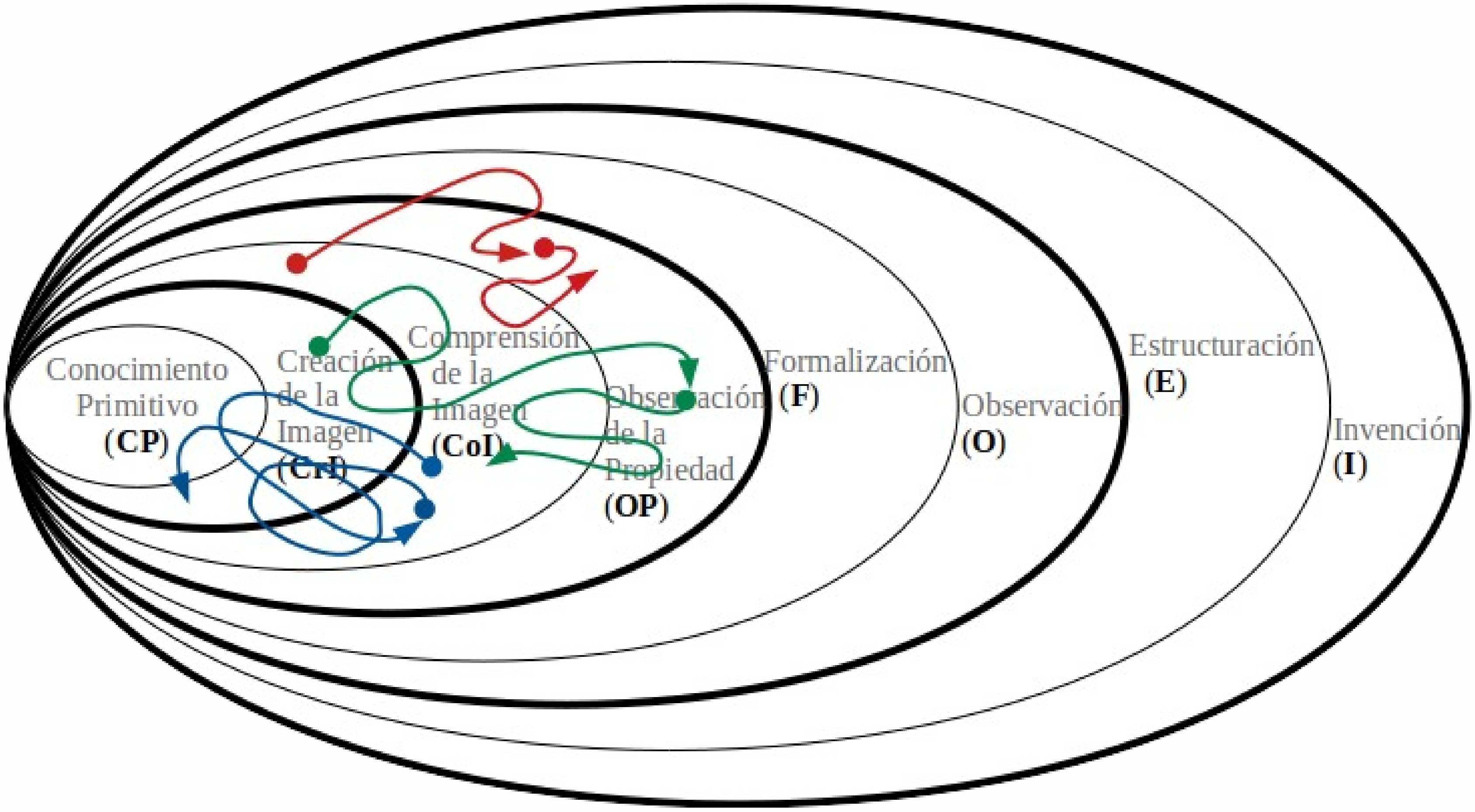
Análisis de las Conversaciones



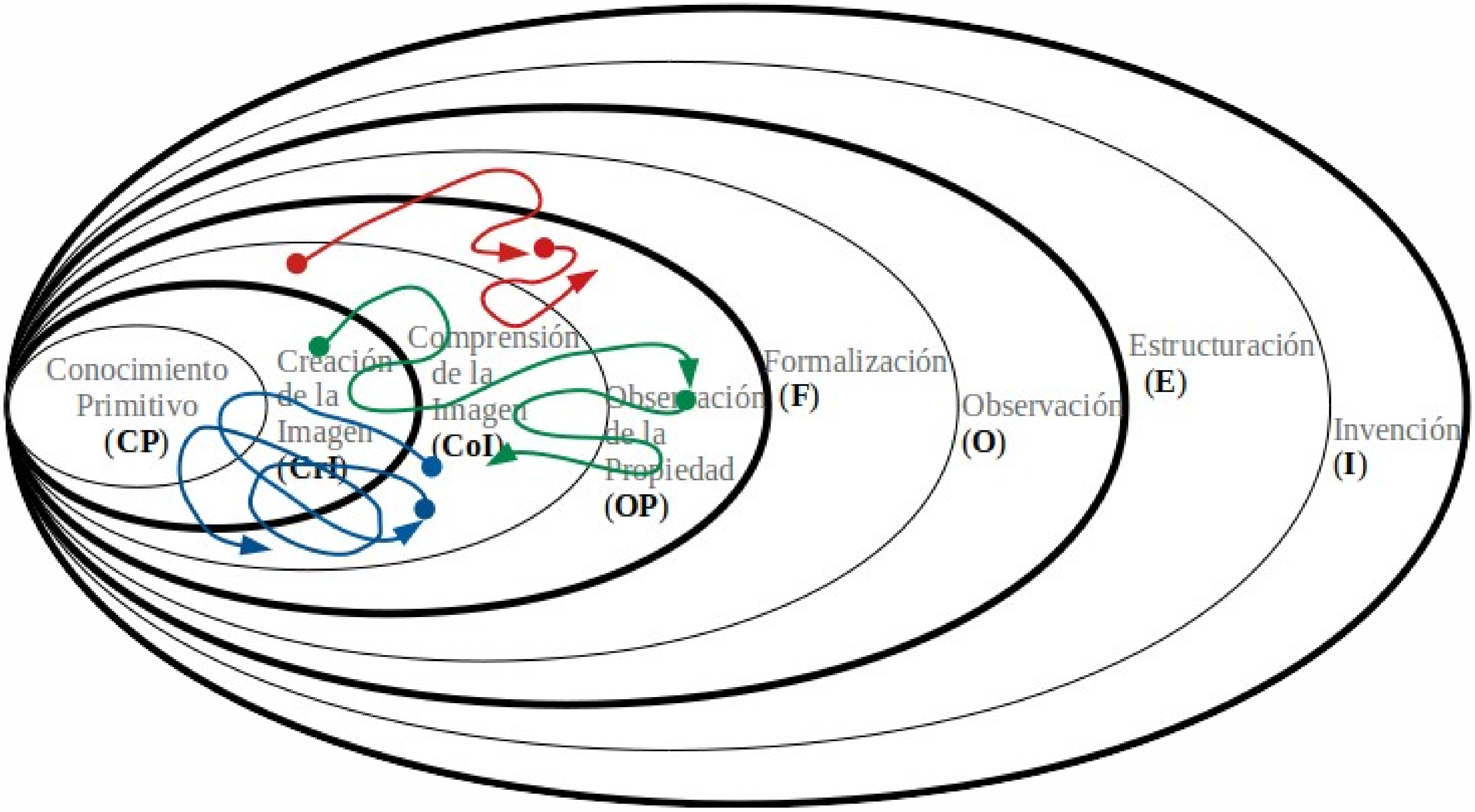
Análisis de las Conversaciones



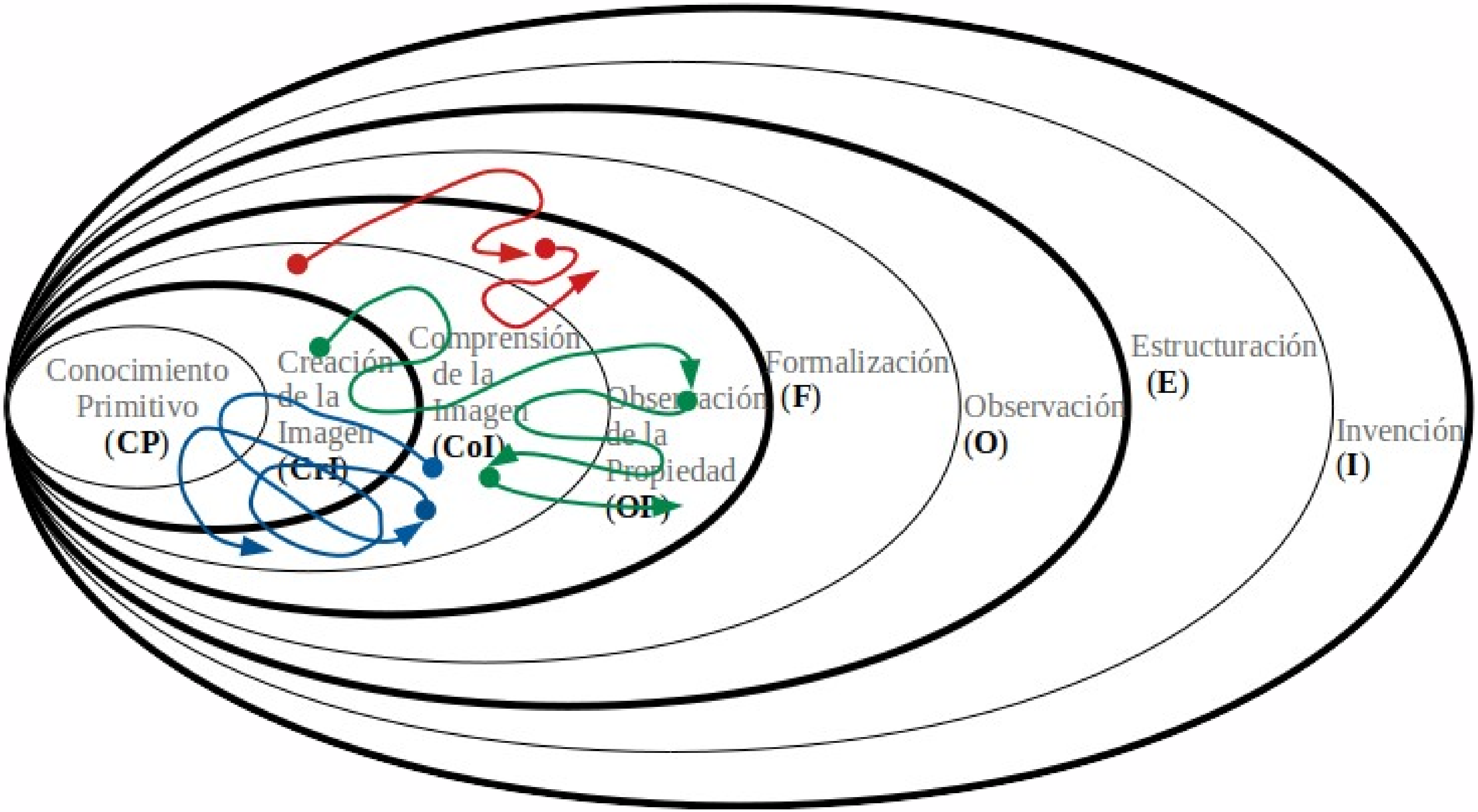
Análisis de las Conversaciones



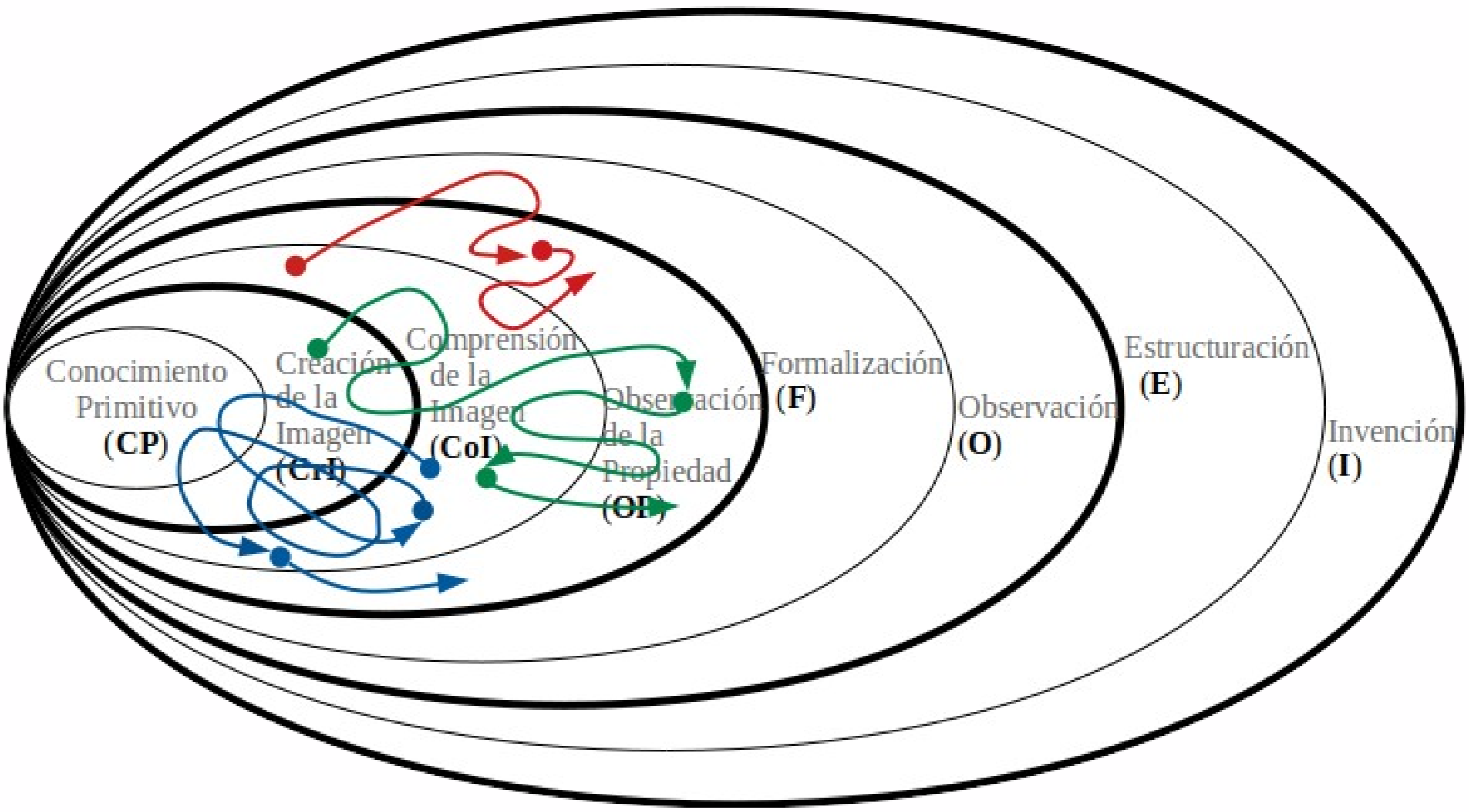
Análisis de las Conversaciones



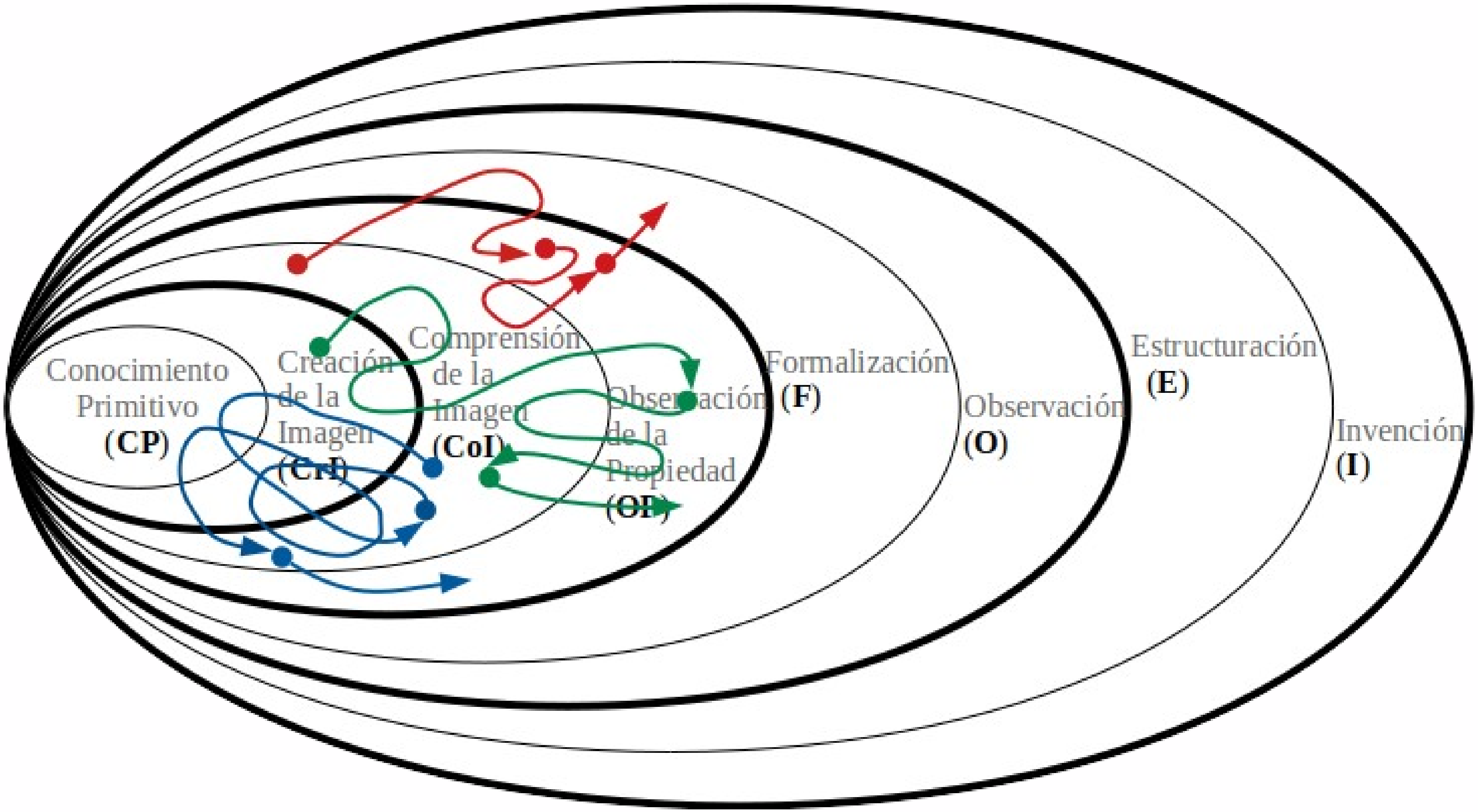
Análisis de las Conversaciones



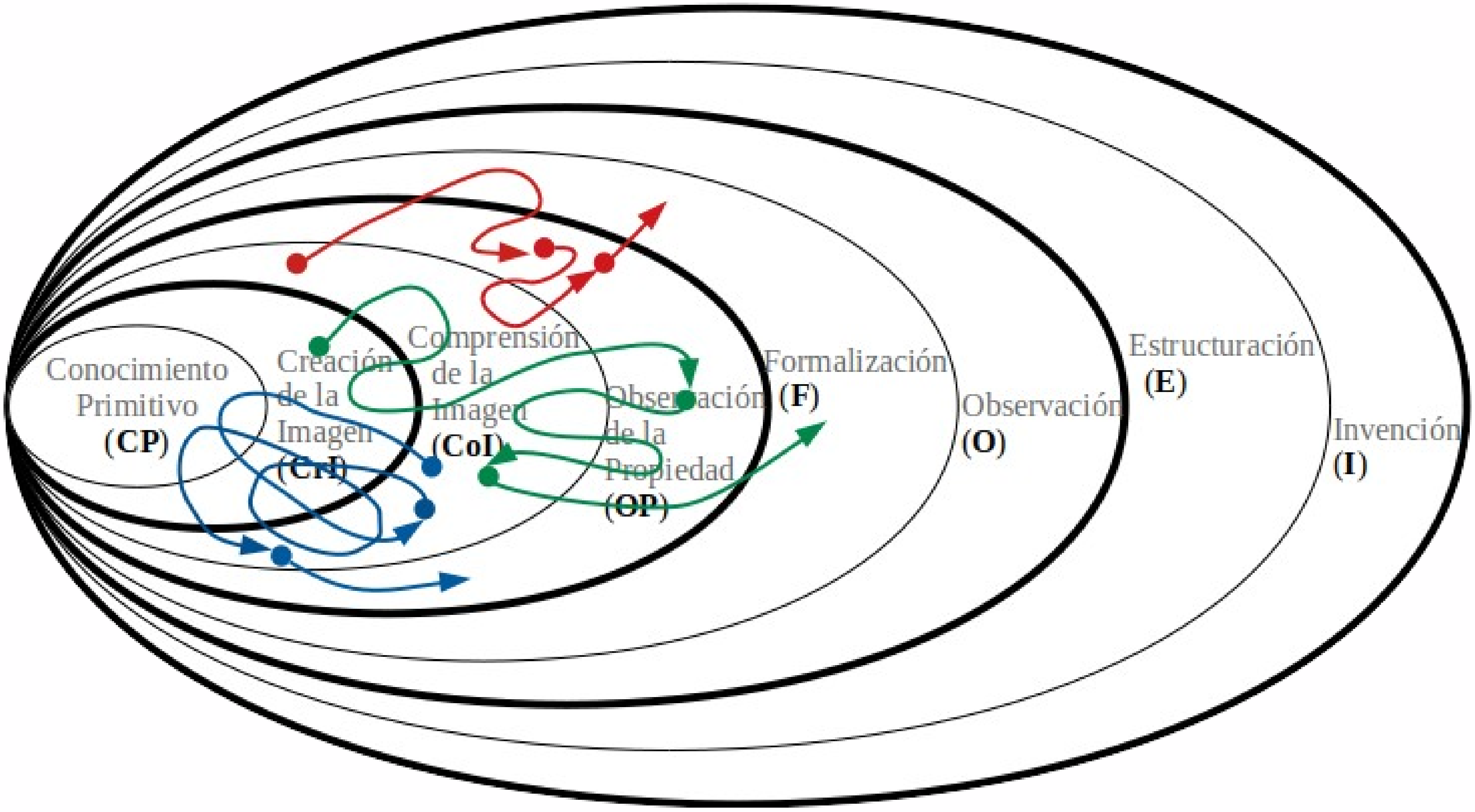
Análisis de las Conversaciones



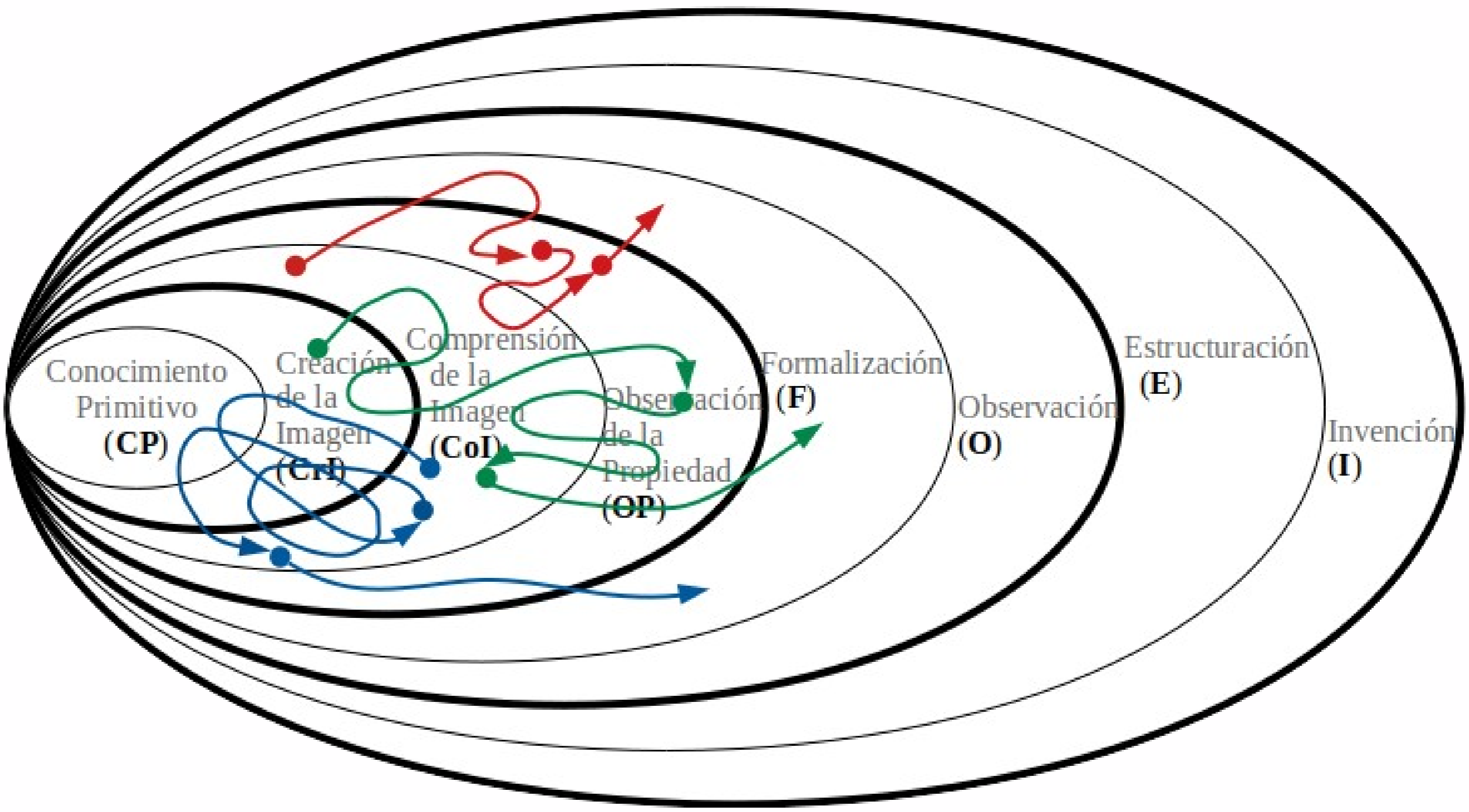
Análisis de las Conversaciones



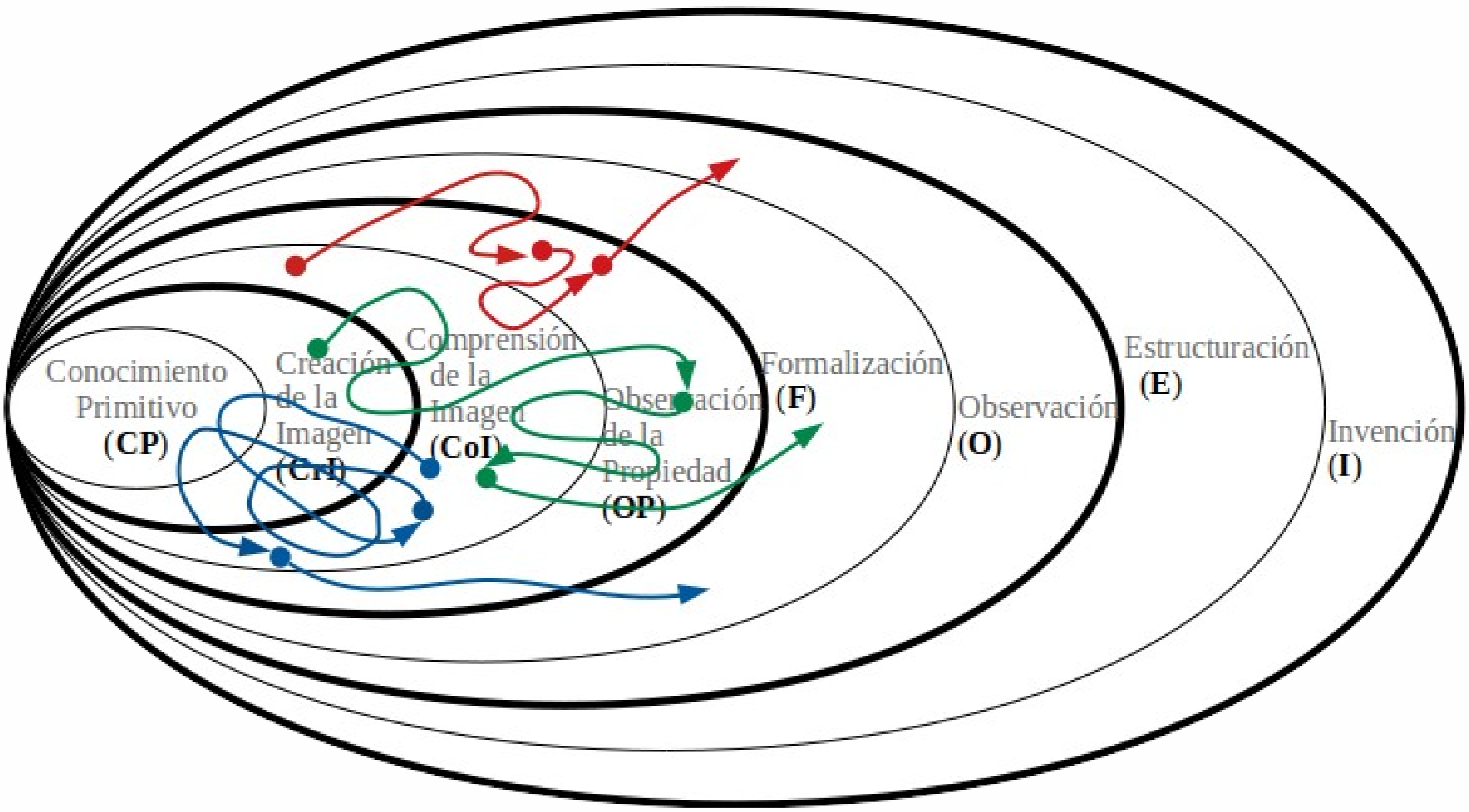
Análisis de las Conversaciones



Análisis de las Conversaciones

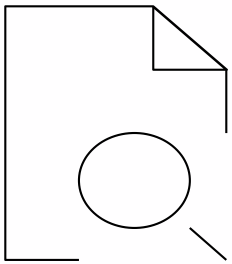


Análisis de las Conversaciones



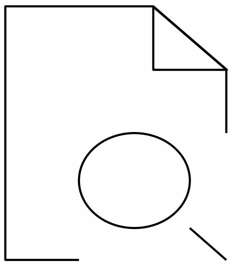
Resultados

- Esta investigación ilustra:
- cómo **los alumnos se enfrentan** a cuestiones aparentemente muy simples para la resolución de una actividad,
- como **la identificación del procedimiento de solución**;
- cómo **han recurrido a sus conocimientos previos** sobre las propiedades del álgebra de proposiciones;
- cómo van aclarando la aplicación de estas propiedades, **volviéndose conscientes** de que pueden ser aplicadas de diferentes formas, y
- cómo van **iniciando la capacidad de formular estrategias** de solución.



Resultados

- Los estudiantes han realizado diferentes ejercicios que les han ayudado a **crearse una idea matemática del concepto** (CrI).
- Una vez creada esta idea, **se pueden liberar de las acciones concretas** sin necesidad de recurrir a las propiedades de la Tabla para avanzar en la resolución de la actividad (CoI).
- Este proceso los lleva a darse cuenta de que los objetos que están manipulando, las proposiciones, **tienen ciertas propiedades generalizables** (OP) y,
- finalmente, **recurren a algunas generalizaciones** para resolver la actividad (F).



Conclusiones

- En este estudio, se ha constatado que **este proceso no es lineal**,
- **no se asciende de** un nivel de comprensión del **conocimiento matemático inferior a otro superior** acumulando información.
- Más bien **es una construcción recursiva** como indican Pirie y Kieren (1989, 1994) que implica necesariamente uno o más «saltos hacia atrás» (redoblados), a formas más sencillas de conocer los diferentes elementos matemáticos en niveles interiores y que, apoyándose en ellas, se puede seguir avanzando hacia niveles exteriores del modelo en el que **el conocimiento se hace más sofisticado y también más consolidado**.

Conclusiones

- Aunque **los redoblados** puedan parecer un problema cognitivo, en realidad **son procesos importantes y necesarios para lograr un avance** hacia una forma más consolidada de comprensión matemática, ya que permiten ir «rellenando» y/o complementando aspectos conceptuales y procedimentales que no estaban bien afinados previamente.
- Además, se pudo constatar que **luego de estos procesos de redoblado**, aunque sólo regresaran al mismo nivel, **en realidad había ocurrido un aprendizaje**, más estable a partir del cual se puede seguir avanzando.

Conclusiones

- **Algunos redoblados fueron más exitosos** y efectivos gracias a la confirmación de algunas dudas de los alumnos por parte del profesor, y otros gracias a la **seguridad** mostrada por alguno de los alumnos más aventajados.
- Se observa que en un grupo de trabajo el hecho de que **los diferentes miembros alcancen niveles de razonamiento distintos y a diferente ritmo es algo normal** (igual que en la tesis de Carmona Correa, 2020),
- También se observa que **las dudas y los fallos en la comprensión** de alguno de los miembros conduzcan a un redoblado hacia **niveles inferiores en la compresión del conocimiento**, a los que se ven arrastrados otros miembros del grupo.

Conclusiones

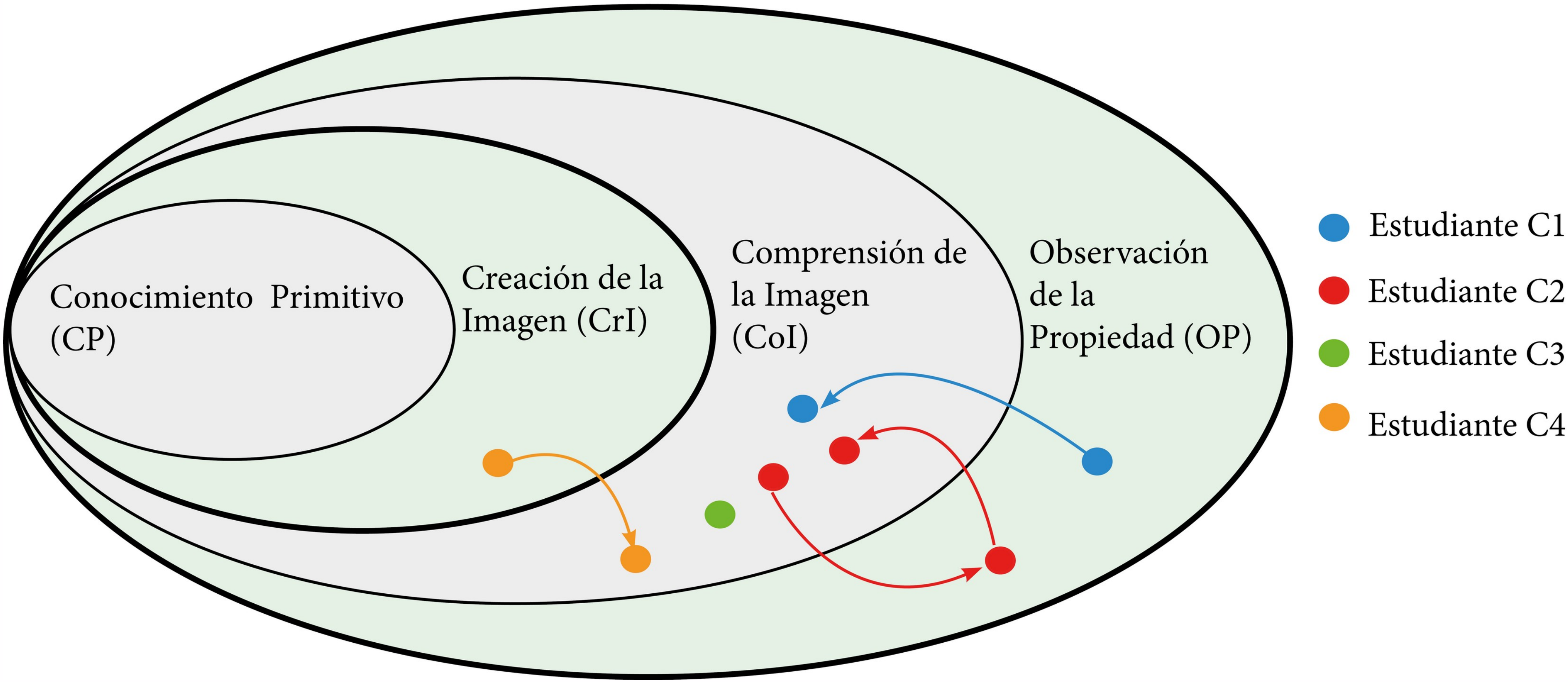
- Es importante en este tipo de actividades, **orientar a los alumnos** de la manera apropiada para **no impedir que los alumnos transiten los redoblados**. Tal como concluye Codes Valcarce y otros (2013), en general hay que **dejar que los alumnos resuelvan por sí mismos algunos conflictos cognitivos** y no darles directamente la solución.

Conclusiones

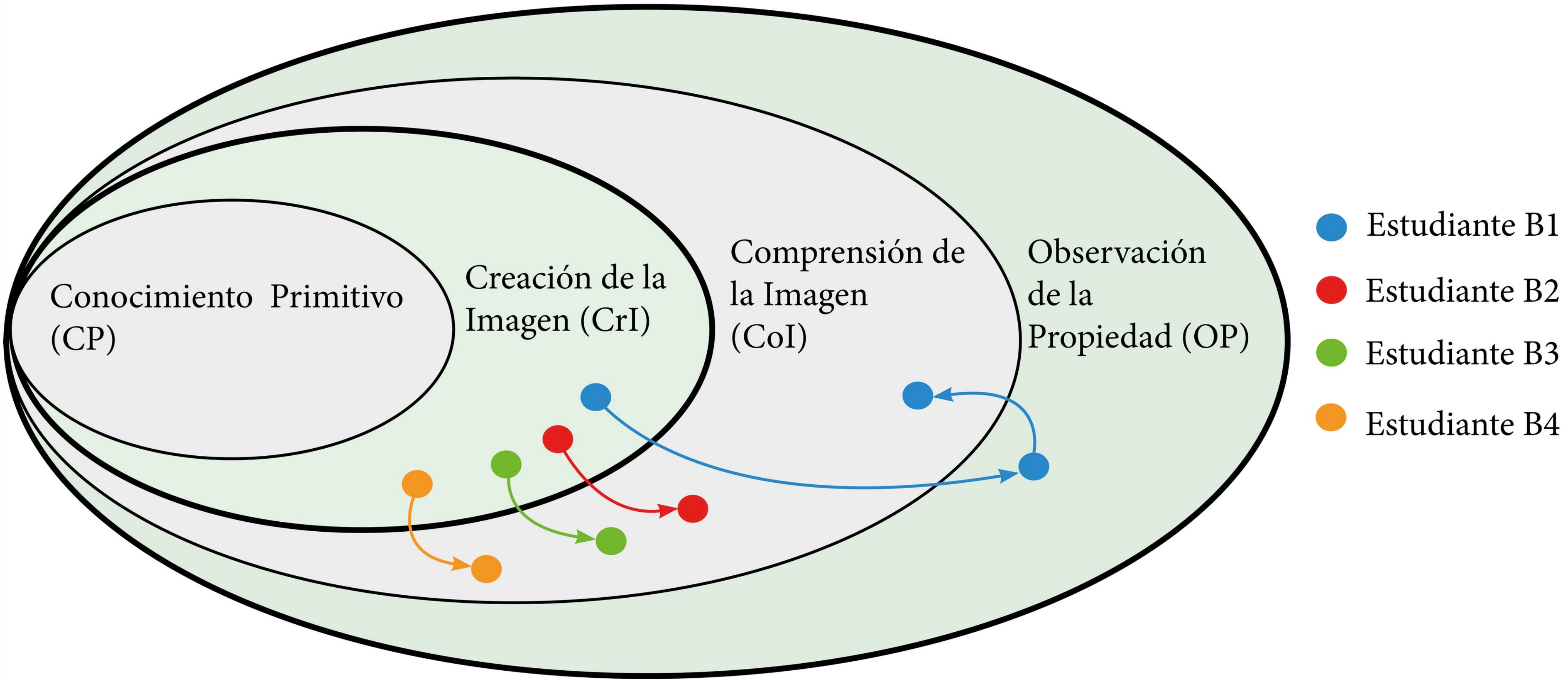
- Coincido con Pirie y Kieren (1989) en que **estudiar la comprensión de un concepto** por parte de los estudiantes es un **proceso muy dificultoso y difícil de generalizar** debido a que son necesarias las entrevistas (y no sólo los exámenes tradicionales) para **poder descubrir la cambiante comprensión de los alumnos**.

Proyectos de Investigación en curso

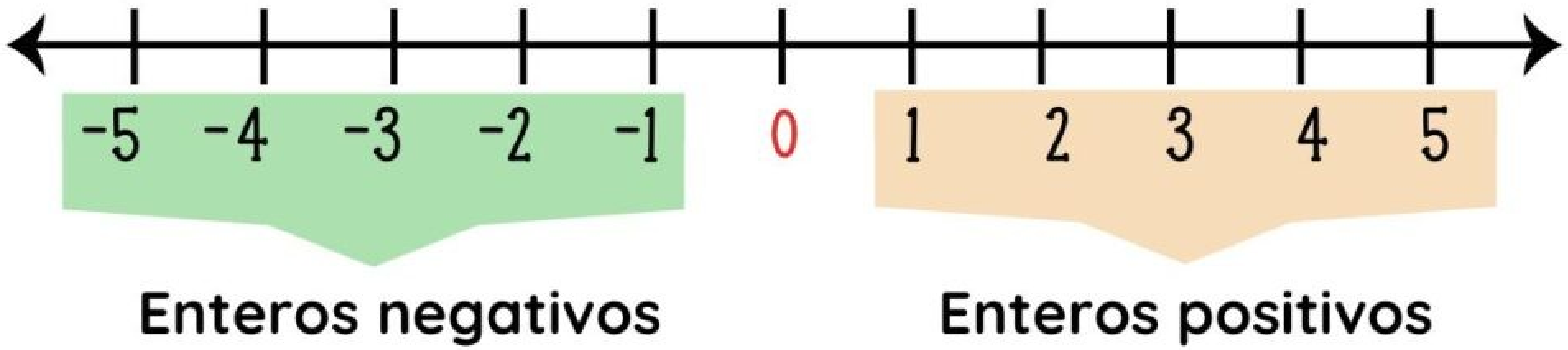
Dificultades con números negativos en 7mo grado



Dificultades con números negativos en 7mo grado

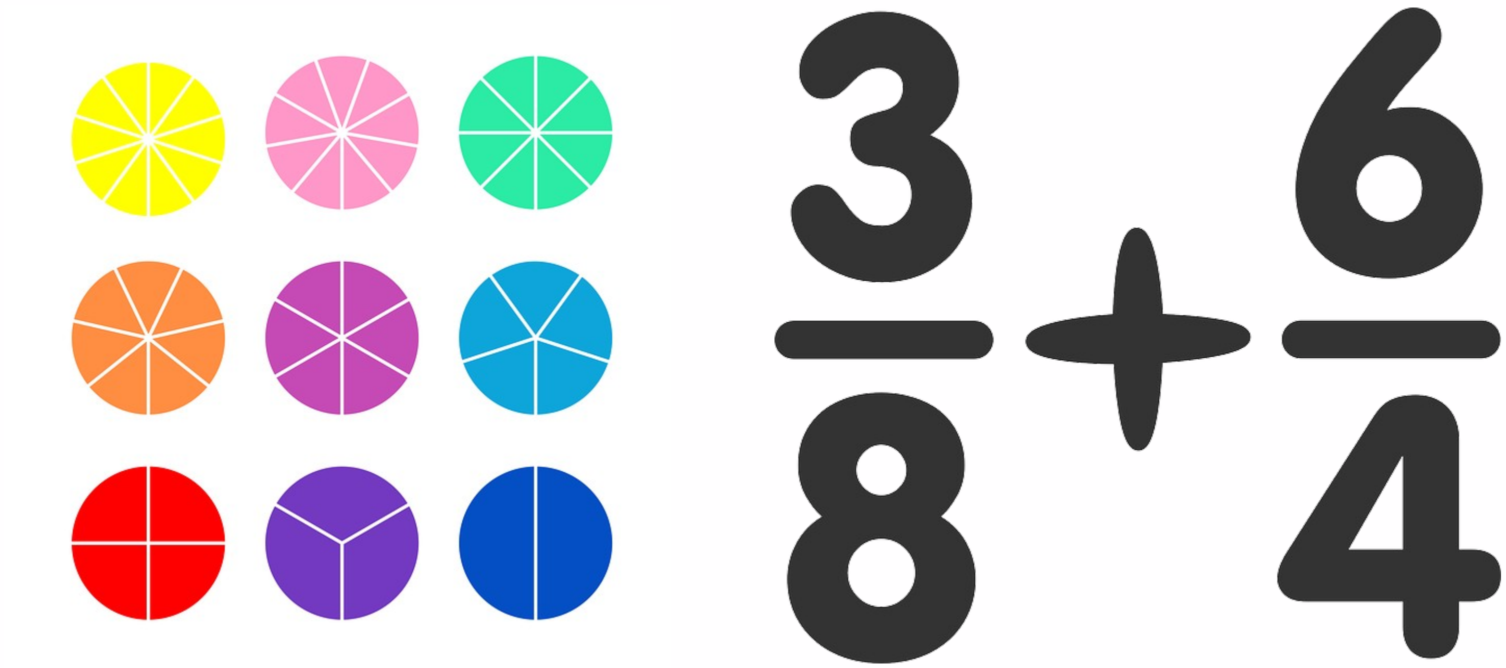


Revisiones sistemáticas



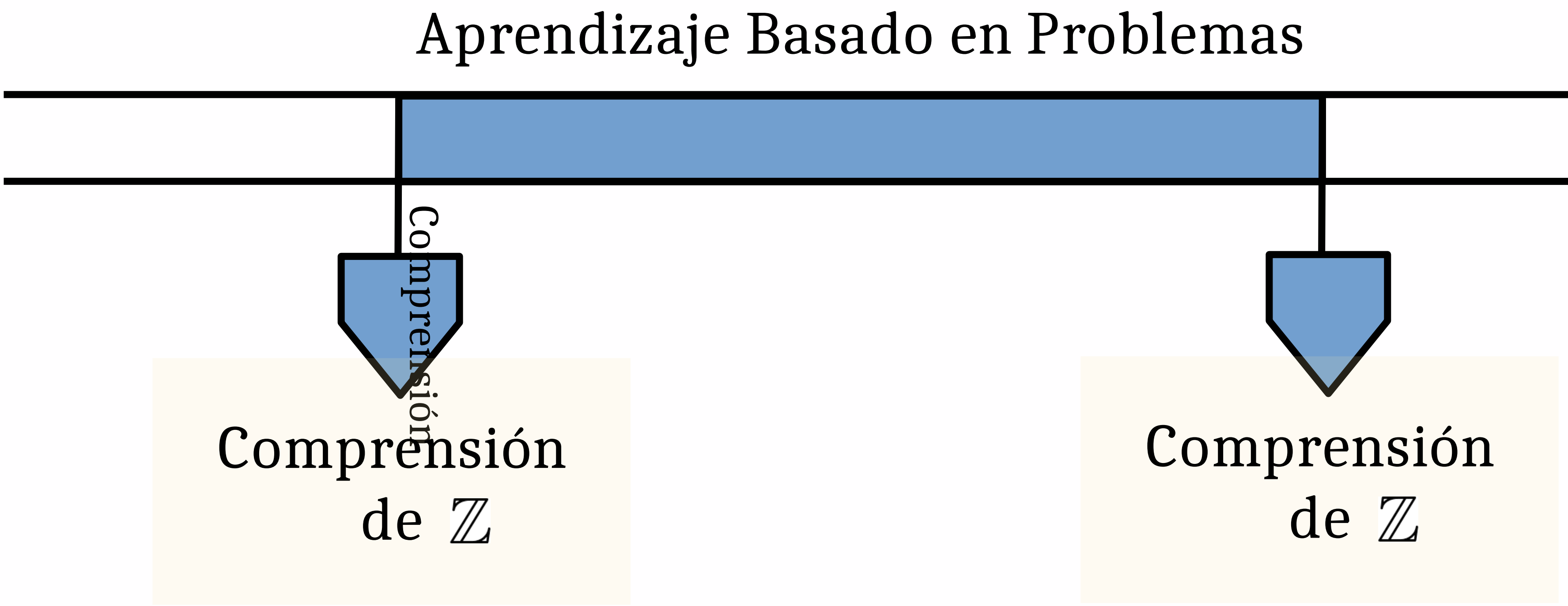
"Pirie and kieren" and (“integers” or "whole numbers")

Revisiones sistemáticas



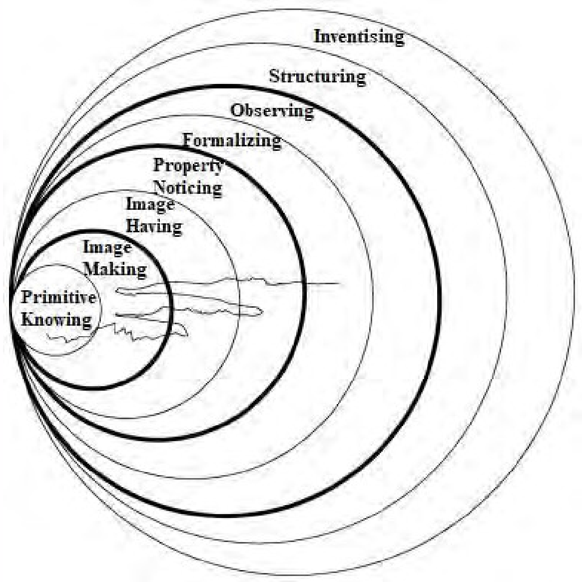
"Pirie and Kieren" AND ("fraction" OR "ratio" OR "rate" OR "proportion") AND "understanding" AND "primary"

Proyectos de Investigación-Acción



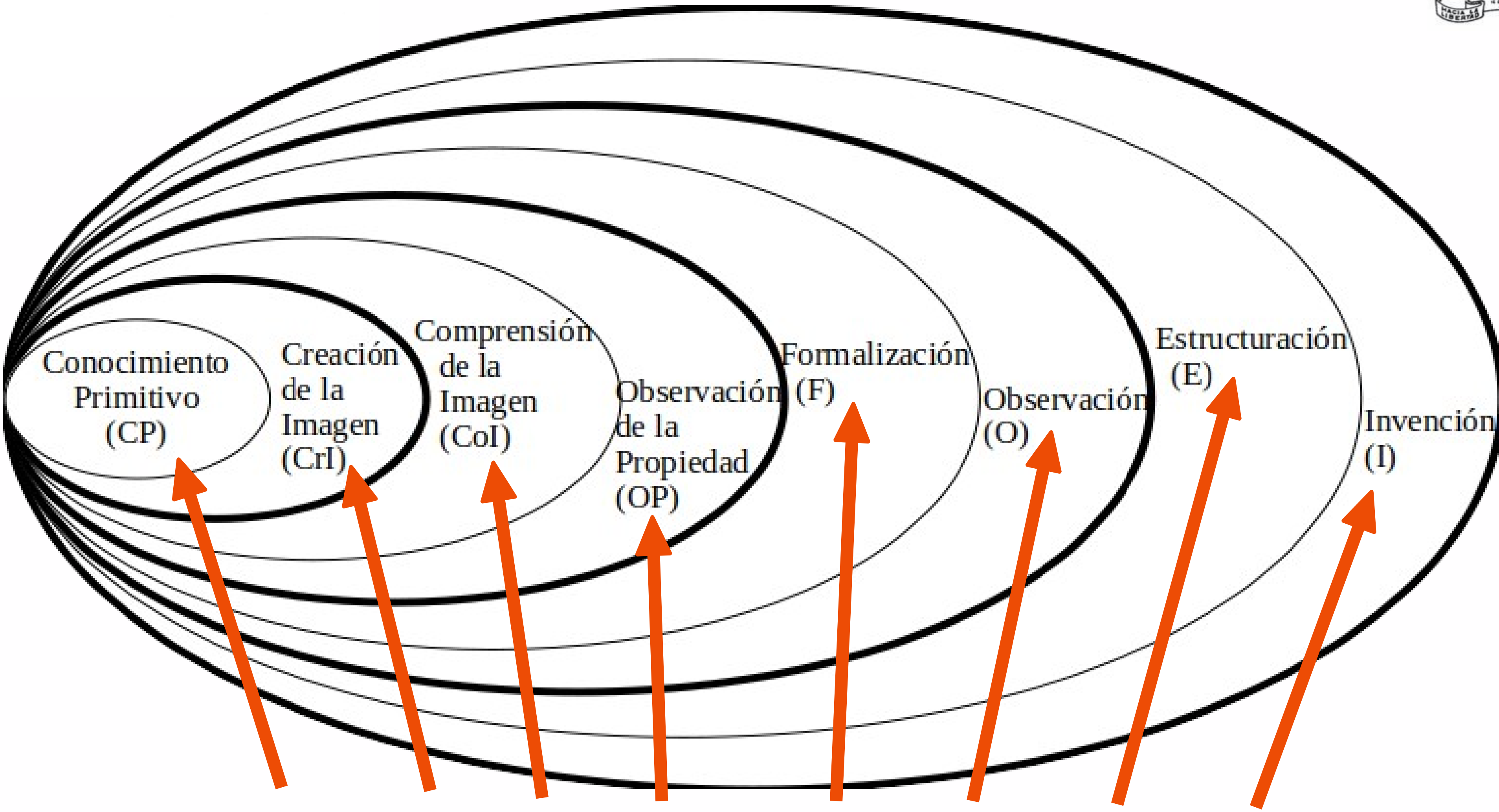
Proyectos de Investigación-Acción

Errores en $\mathbb{Z}$



Comprensión de $\mathbb{Z}$

Estudio Teórico



Características cognitivas concretas en la comprensión de $\mathbb{Z}$

Referencias

- Alfaro Carbajal, C., Flores Martínez, P., y Valverde Soto, G. (2019). El conocimiento de la práctica matemática sobre las demostraciones en profesores de matemática en formación inicial. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 32* (1), 497-504.
- Angulo Vergara, M. L., Arteaga Valdés, E. y Carmenates Barrios, O. A. (2020). La formación de conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Revista Conrado 16* (74), 298-305.
- Carmona Correa, M. C. (2020). *La enseñanza del concepto de paralelismo y perpendicularidad mediante la implementación de un proyecto de aula* [Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/78753.
- Codes Valcarce, M., Delgado Martín, M. L., González Astudillo, M. T. y Monterrubio Pérez, M. C. (2013). Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las Ciencias, 31* (3), 135-154.

Referencias

- Delgado Martín, M. L., Codes Valcarce, M., Monterrubio Pérez, M. C., y González Astudillo, M. T. (2014). El concepto de serie numérica. Un estudio a través del modelo de Pirie y Kieren centrado en el mecanismo “folding back”. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (6), 25-44.
- Gallardo, J. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales* [Tesis de Doctorado, Universidad de Málaga].
- Gokalp, N. D., & Bulut, S. (2018). A New Form of Understanding Maps: Multiple Representations with Pirie and Kieren Model of Understanding. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 26*(6). https://openjournals.library.sydney.edu.au/CAL/article/view/12454
- Gonzales, G. (2022). Mapping Pupil’s Learning Progression Using Hand Manipulatives and Touch Screen Applications: Implications to Post-COVID-19 New Normal. *Education Research International, 2022*. https://doi.org/10.1155/2022/9976083
- Martin L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie–Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 27* (1), 64-85. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2008.04.001.

Referencias

- Meel, D. E. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la Teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 6* (3), 221-278.
- Navas-López, E. A. (2022). Comprensión del concepto de equivalencia lógica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 35* (1). https://goo.su/q8VreFx
- Pirie, S. E. B. y Kieren, T. E. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics, 9* (3), pp. 7-11.
- Pirie S., Kieren T. (1994). Growth in Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?. En P. Cobb (ed). *Learning Mathematics* (pp. 61–86). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2057-1_3.

Referencias

- Plazas Alvarado, J. R. (2020). *La comprensión en trigonometría en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Universidad de Los Andes, Colombia. https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/la-compresion-en-trigonometria-en-el-marco-de-la-teoria-de-pirie-y-kieren/

- Villa Ochoa, J. A. (2011). *La comprensión de la tasa de variación para una aproximación al concepto de derivada: un análisis desde la teoría de Pirie y Kieren*. [Tesis de Doctorado, Universidad de Antioquia]. http://hdl.handle.net/10495/16849.

- Vinner, S. (1983). Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14* (3), 293-305. https://doi.org/10.1080/0020739830140305